〈論　　文〉

不確実性下における排出削減投資と環境政策について*

前鶴　政和

1．はじめに

近年、環境汚染が深刻となっており、1国内の環境汚染だけではなく、地球温暖化や酸性雨のような、世界規模での環境汚染が問題となっている。これらの世界規模での環境汚染は、先進国が中心となって発生させてきたものであり、特に、国際的に活動している先進国における寡占企業の生産が、その大きな要因となっていると考えられる。そこで、現実の世界規模での環境汚染問題を考察し、各国政府が課す環境政策について検討するためには、国際寡占競争下の企業に課される環境政策を分析しなければならない。さらに、汚染物質は長期にわたって蓄積されていくものであり、その蓄積過程には、不確実性が生じると考えられる。したがって、世界規模での環境汚染問題を考える際には、長期的視点で考察する必要があるため、静学分析の枠組みではなく、不確実性を考慮に入れた上で、動学分析の枠組みで分析しなければならない。

以上のような問題意識にしたがって、本稿は、2国にそれぞれ企業が1社ず

---

*　本稿は、2007年度日本経済学会春季大会において報告した論文を加筆・修正したものです。報告に際し、座長の多和田眞教授（名古屋大学）ならびに討論者の辻村元男准教授（龍谷大学）より、貴重なコメントを賜りました。ここに記して感謝の意を表します。ただし、本稿における誤謬のすべては、筆者の責任に帰するものです。
なお、本稿は平成19年度日本学術振興会科学研究費補助金（若手研究(B)、課題番号：19730189）の成果の一部です。感謝申し上げます。

つ存在し、各企業が汚染物質を排出するような財の生産及び第３国市場への輸出を行っているが、同時に排出削減投資を行うような状況を想定する。その際、各国政府は環境政策として、各国企業の排出量に排出税を課すものとする。また、汚染物質は、ある国で発生すると国境を越えて世界全体に広がるものとし、２企業の排出量の合計が世界全体の汚染ストックとして通時的に蓄積されていくものとする。世界全体の汚染物質の総量が自国及び外国に同様に環境損失を与えるものとする。その際、蓄積過程に不確実性が生じ、幾何 Brown 運動にしたがって変動すると仮定する。本稿の目的は、以上のような想定の下で、２国政府間の無限期間の確率微分ゲームを考えることによって、不確実性下の環境政策について考察することである。

本稿のモデルは、３段階のゲームから構成されるものと考える。まず、第１段階において、各国政府は排出税率を決定する。第２段階において、第１段階で決定された排出税率に基づき、各企業は排出削減水準を決定する。第３段階においては、第１段階で決定された排出税率および第２段階で決定された排出削減水準に基づき、各国企業がクールノー競争を行なうものとする。

本稿の分析は、以下に挙げるような先行研究に依存する。まず、排出削減と環境政策に関しては、以下のような研究が挙げられる。 Katsoulacos & Xepapadeas (1996) は、排出税及び排出削減補助金が課されている状況で、同一国内でクールノー競争を行う２企業が排出削減に投資する際の、最適な排出税率及び排出削減補助金率を導出している。しかし、本稿と異なり、彼らの研究は同一国内の２企業を対象としたものであり、さらに、動学的な分析は行われていない。

次に、微分ゲームに関しては、以下のような研究が挙げられる。Kort (1996)、Stimming (1999) は、同一国内にある２企業が、排出税や排出規制の下での企業の最適な投資戦略に関して微分ゲームの枠組みで分析している。しかし、本稿と異なり、彼らの研究は同一国内の２企業を対象としたものであり、さらに、政府の最適な戦略は考察されていない。

また、 Reynolds (1987) は、同一国内の２企業が生産設備に投資する状況を考察し、 open-loop ナッシュ均衡解と Markov 完全ナッシュ均衡解を比較して

いる。しかし、本稿と異なり、彼らの研究は、同一国内の2企業を対象としており、さらに環境問題に関する分析は行われていない。

Wirl (2004)は、排出量を戦略変数として、排出量に制約がないケースと制約がある（非負の排出量）ケースに分けて、確率微分ゲームの枠組みで地球温暖化問題を分析している。

Yeung & Petrosyan (2006)は、協調確率微分ゲームについて分析し、サブゲーム整合的な解を示している。

以上のような先行研究に基づき、本稿では確率微分ゲームの枠組みを用いて国際寡占競争下における排出削減と排出税について分析し、Markov 完全ナッシュ均衡解及び協調均衡解を導出し、協調確率微分ゲームにおけるサブゲーム整合的な解を求める。

本稿の構成は以下の通りである。2節で基本モデルを提示する。3節で各国政府の確率的動的最大化問題を定式化し、確率微分ゲームの枠組みを用いて各国政府間の排出税ゲームのMarkov 完全ナッシュ均衡解を求める。4節で協調均衡解を求める。5節でサブゲーム整合的な解を求める。6節で結論を述べる。

2．モデル

本節では、基本モデルを提示する。自国・外国の2国に、汚染物質を排出するような同質財を生産する企業が1社ずつ存在し、第3国市場においてクールノー競争を行うモデルを考える。各国企業は、自国及び外国の市場には供給しないものとする[1]。

まず、第3国市場の逆需要関数は次式で与えられるものとする。

$$p = p(Q) = a - Q \qquad (1)$$

ただし、pは価格、q_iは企業 i の生産量、$Q = q_1 + q_2$ である。

ここで、各国企業の生産活動は生産物と同量の汚染物質を排出するものとす

1 このような第3国市場モデルについては、Barrett (1994)、Brander& Spencer (1985) などを参照。

る。排出された汚染物質は、国境を越え、通時的に蓄積されていくものとする。具体的には、当該産業が鉄鋼産業であり、生産する際に石炭を使用するため、二酸化炭素が排出され、その蓄積により地球温暖化を引き起こしているものと考える。各国企業は、排出削減投資を行うものとする。排出削減投資が行われると、生産過程において汚染物質を減らすような技術が採用され、排出量が減少する。排出削減投資が行われなければ、各国企業の生産活動は、生産物と同量の汚染物質を排出する。

排出削減投資が行われた後の、企業 i の排出量は、次のように表される。

$$E_i = q_i - x_i \quad (i = 1,2) \tag{2}$$

ここで、x_i は、排出削減投資の成果としての排出削減水準を表す。x_i だけ排出量を減少させるための排出削減投資費用関数は、以下の式で表される

$$g_i(x_i) = \gamma_i x_i^2 / 2 \quad (i = 1,2) \tag{3}$$

ここで、各国政府は、環境対策として、各国企業の排出量に１単位あたり τ_i だけの排出税を課すものとする。

上記の仮定を所与として、企業 i の利潤 π_i は次のように表される。

$$\pi_i = p(Q)q_i - \tau_i E_i - g_i(x_i) \; (i = 1,2) \tag{4}$$

ただし、生産費用は０と仮定する。

このゲームは、３段階ゲームで構成される。まず、第１段階において、各国政府が排出税率を決定する。次に、第２段階において、各国企業は排出削減水準を選択し、第３段階において生産量を選択する。

このゲームを後ろ向きに解いていく。まず、各国企業は第３段階において、排出税率及び排出削減水準を所与として、各国企業の利潤を最大化するように生産量を選択する。このとき、生産量に関する利潤最大化の１階の条件は次式で与えられる。

$$a - 2q_i - q_j - \tau_i = 0 \quad (i, j = 1,2; i \neq j) \tag{5}$$

(5)式より、サブゲーム均衡における各国企業の生産量は次式で与えられる。

$$q_i(\tau_i, \tau_j) = (a - 2\tau_i + \tau_j)/3 \quad (i, j = 1,2; i \neq j) \tag{6}$$

第２段階において、各国企業は排出税率を所与として、(6)式より、以下のような利潤を最大化するように排出削減水準を決定する。

$$\pi_i = q_i(\tau_i, \tau_j)^2 + \tau_i x_i - \gamma_i x_i^2/2 \ \ (i, j = 1,2; i \neq j) \tag{7}$$

排出削減水準に関する利潤最大化の1階の条件は、次式で与えられる。

$$\tau_i - \gamma_i x_i = 0 \ \ (i = 1,2) \tag{8}$$

したがって、サブゲーム均衡における排出削減水準は、次式で与えられる。

$$x_i = \tau_i/\gamma_i \ \ (i = 1,2) \tag{9}$$

3． Markov 完全ナッシュ均衡解

本節では、各国政府間の排出税ゲームに関する Markov 完全ナッシュ均衡[2]を導出する。各国政府は、各時点において状態変数である汚染ストックに依存して排出税率を決定する、Markov 戦略を採用するものと仮定する。

2国の企業によって排出される汚染物質は、国境を越え、一部は自然浄化されるが、浄化されない部分は通時的に蓄積する。また、蓄積過程に不確実性が生じるものとする。すなわち、$S(t)$ を t 時点での地球規模での汚染ストックとすれば、$S(t)$ は以下の確率微分方程式に従って蓄積されていく。

$$dS(t) = \{E_1(t) + E_2(t) - \delta S(t)\}dt + \sigma S(t)dw(t) \tag{10}$$

ただし、δ は自然浄化率を表す。

現実の汚染物質の蓄積過程から生じる結果は不確実であると考えられる。そこで、確率的要素として(10)式には幾何的ブラウン運動を表す項 σSdw を導入している。パラメータ $\sigma > 0$ は標準偏差を表し、dw は Wiener 過程 w の増分である。このモデルは、平均的な汚染物質の蓄積が増加すればするほど、汚染物質の蓄積の変動が大きくなるということを意味する。

各国の利得関数は、以下のように表される。

$$W_i = \pi_i + \tau_i E_i - D(S) \tag{11}$$

ただし、$D(S) = hS^2/2$ は汚染物質によって引き起こされる環境損失を表す。

各国政府は、汚染物質の蓄積過程(10)式の制約の下で、各国の利得の（割引

2 確率微分ゲームの Markov 完全ナッシュ均衡については、Dockner et al.(2000)などを参照。

率ρで割り引かれた）期待割引現在価値を最大化するように、その排出税率を選択するものとする。したがって、各国政府の確率的動的最大化問題は、次式で表される[3]。

$$\begin{aligned} &V_i(S_0) = \max_{\tau_i} E\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho t} W_i \, dt \right) \\ &s.t.\ dS = \{E_1 + E_2 - \delta S\} dt + \sigma S dw, S(0) = S_0 \end{aligned} \tag{12}$$

ただし、Eは期待値を表す。

(12)式のV_iは政府iの価値関数であり、以下のHamilton-Jacobi-Bellman 方程式を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} &\rho V_i \\ &= \max_{\tau_i} \left\{ \frac{(a-2\tau_i+\tau_j)^2}{9} + \frac{\tau_i^2}{2\gamma_i} + \frac{\tau_i\{\gamma_i a - (2\gamma_i+3)\tau_i + \gamma_i\tau_j\}}{3\gamma_i} - \frac{hS^2}{2} + V_i'\left\{ \frac{2\gamma_i a - (3+\gamma_i)(\tau_i+\tau_j)}{3\gamma_i} - \delta S \right\} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_i'' \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

このゲームのlinear-quadraticの構造から、価値関数は以下のようなSに関する2次関数であると考えられる。

$$V_i = (1/2)\beta_i S^2 + \phi_i S + \psi_i \tag{14}$$

(14)式より、次の式が得られる。

$$V_i' = \beta_i S + \phi_i \tag{15}$$

$$V_i'' = \beta_i \tag{16}$$

(13)式の右辺の最大化から、排出税率に関して以下の式を得る。

$$\tau_i = \frac{-3(\gamma_j+3)\gamma_i a - 3(\beta_i S + \phi_i)(4\gamma_j+9)(\gamma_i+3) + 3\gamma_i(\gamma_j+3)(\beta_j S + \phi_j)}{\Gamma_1} \tag{17}$$

ただし、$\Gamma_1 = (4\gamma_i+9)(4\gamma_j+9) - \gamma_i\gamma_j$ である。

(13)式に(14)式の価値関数、(15)、(16)式と(17)式の最大化の条件を代入して係数比較を行うと、(14)式の価値関数のパラメータに関して、以下の式を得る。

$$\beta_i = \frac{-\Gamma_{3i} - \sqrt{\Gamma_{3i}^{\ 2} - 4\Gamma_{2i}\Gamma_{4i}}}{2\Gamma_{2i}} \tag{18}$$

---

3 確率的動的最大化問題については、Chang (2004)、Kamien&Schwartz (1991)などを参照。

$$\phi_i = \frac{\Gamma_{6i}\phi_j + \Gamma_{7i}\beta_i a + \Gamma_{8i}\beta_j a}{\Gamma_{5i}} \tag{19}$$

$$\psi_i = \frac{\Gamma_{9i}\phi_i^2 + \Gamma_{10i}\phi_i + \Gamma_{11i}\phi_j + \Gamma_{12i}\phi_i\phi_j + \Gamma_{13i}}{18\gamma_i\gamma_j\rho\Gamma_1^2} \tag{20}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\Gamma_{2i} &= 9\left\{9(\gamma_i-\gamma_j)-\gamma_i(4\gamma_j+9)\right\}(4\gamma_j+9)^2(\gamma_i+3)^2+18\gamma_i\gamma_j^2(4\gamma_j+9)(\gamma_i+3)^2\\ &\quad +18\gamma_j(\gamma_i+3)\left\{(4\gamma_i+9)(4\gamma_j+9)-\gamma_i\gamma_j\right\}\left\{(\gamma_i+3)(4\gamma_j+3)-\gamma_i\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{3i} &= -18\gamma_i(\gamma_i+3)(\gamma_j+3)(4\gamma_j+9)\left\{9(\gamma_i-\gamma_j)-\gamma_i(4\gamma_j+9)\right\}\gamma_i^2(\gamma_j+3)^2\beta_j^2+18\gamma_i^2\gamma_j(\gamma_j+3)^2(4\gamma_j+9)\beta_j^2\\ &\quad -9\Gamma_1^2\gamma_i\gamma_j(\rho+2\delta-\sigma^2)-6\gamma_i\gamma_j^2(\gamma_i+3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{4i} &= 9\left\{9(\gamma_i-\gamma_j)-\gamma_i(4\gamma_j+9)\right\}\gamma_i^2(\gamma_j+3)^2\beta_i^2+18\gamma_i^2\gamma_j(4\gamma_j+9)(\gamma_i+3)^2\beta_i^2\\ &\quad +6\gamma_i\gamma_j(4\gamma_i+9)(\gamma_j+3)-9\Gamma_1^2\gamma_i\gamma_j h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{5i} &= 36\gamma_i\gamma_j^2(\gamma_i+3)\left\{\beta_i\gamma_j(\gamma_i+3)-(\gamma_j+3)(4\gamma_i+9)\beta_j\right\}-18\Gamma_1^2\gamma_i\gamma_j\delta+36\beta_i\gamma_j(\gamma_i+3)\Gamma_1\left\{(\gamma_i+3)(4\gamma_j+9)-\gamma_i\right\}\\ &\quad -18\gamma_i(\gamma_j+3)\Gamma_1\left\{\gamma_j(\gamma_i+3)-(4\gamma_i+9)\right\}\beta_j-18\gamma_i\gamma_j^2\Gamma_1^2\rho\end{aligned}$$

$$\Gamma_{6i} = 36\gamma_i\gamma_j(\gamma_j+3)(4\gamma_i+9)\left\{\beta_j(\gamma_j+3)(4\gamma_i+9)-\gamma_j(\gamma_i+3)\beta_i\right\}-18\Gamma_1\gamma_i(\gamma_j+3)\delta\left\{\gamma_j(\gamma_i+3)-(4\gamma_i+9)\beta_i\right\}$$

$$\Gamma_{7i} = 6\gamma_i\gamma_j a\Gamma_1\left\{3(\gamma_i+3)(3\gamma_j+7)+2\Gamma_1\right\}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{8i} &= -36\gamma_i\gamma_j^2 a(\gamma_i+3)(\gamma_j+3)(4\gamma_i+9)-18\gamma_i^2\gamma_j a(\gamma_j+3)\left\{(\gamma_j+3)(4\gamma_i+9)-\gamma_j(\gamma_i+3)\right\}\\ &\quad -6\Gamma_1\gamma_i\gamma_j a(\gamma_j+3)\Gamma_1\left\{\gamma_i+2(4\gamma_i+9)\right\}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{9i} = 18\gamma_j(\gamma_i+3)\Gamma_1\left\{(\gamma_i+3)(4\gamma_j+9)-\gamma_i\right\}$$

$$\Gamma_{10i} = 6\gamma_i\gamma_j a\Gamma_1\left\{3(\gamma_i+3)(3\gamma_j+7)+2\Gamma_1\right\}$$

$$\Gamma_{11i} = -6\gamma_i\gamma_j a\Gamma_1(\gamma_j+3)\left\{\gamma_i+2(4\gamma_i+9)\right\}$$

$$\Gamma_{12i} = -18\gamma_i(\gamma_j+3)\Gamma_1\left\{\gamma_j(\gamma_i+3)-(4\gamma_i+9)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{13i} =& \left\{9(\gamma_i - \gamma_j) - \gamma_i(4\gamma_j + 9)\right\} \times \\
& \Big[9\left\{9(\gamma_i - \gamma_j) - \gamma_i(4\gamma_j + 9)\right\}\gamma_i^2(\gamma_j + 3)^2 + 18\gamma_i^2\gamma_j(4\gamma_j + 9)(\gamma_i + 3)^2 \\
& -18\gamma_i(\gamma_i + 3)(\gamma_j + 3)(4\gamma_j + 9)\left\{9(\gamma_i - \gamma_j) - \gamma_i(4\gamma_j + 9)\right\}\gamma_i^2(\gamma_j + 3)^2 + 18\gamma_i^2\gamma_j(\gamma_j + 3)^2(4\gamma_j + 9)\Big] \\
& +2\gamma_i\gamma_j\Big[-18\gamma_j(\gamma_j + 3)(\gamma_i + 3)(4\gamma_i + 9)\left\{9(\gamma_j - \gamma_i) - \gamma_j(4\gamma_i + 9)\right\}\gamma_j^2(\gamma_i + 3)^2 \\
& +18\gamma_j^2\gamma_i(\gamma_i + 3)^2(4\gamma_i + 9) + 9\Gamma_1^2\gamma_i\gamma_j h\Big] \\
& +6\gamma_i^2\gamma_j a^2\Gamma_1(\gamma_j + 3) + 2\gamma_i\gamma_j a^2\Gamma_1\left\{\Gamma_1 - 6\gamma_j(\gamma_i + 3)\right\}
\end{aligned}
$$

である。

なお、β_iに関しては正の共役解も存在するが、経路の安定条件のために、β_iは負でなければならない。

次に、汚染ストックの経路について検討する[4]。(10)式に最適な排出税率の式(17)を代入すると、次式を得る。

$$dS = \left[A^N - B^N S\right]dt + \sigma S dw,\ S(0) = S_0 \tag{21}$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
A^N =& \frac{9\gamma_j(\gamma_i + 3)\left\{\gamma_i(\gamma_j + 3) + (4\gamma_j + 9) - \gamma_i\right\}\phi_i + 9\gamma_i(\gamma_j + 3)\left\{\gamma_j(\gamma_i + 3) + (4\gamma_i + 9) - \gamma_j\right\}\phi_j}{3\gamma_i\gamma_j\Gamma_1} \\
& + \frac{2\gamma_i\gamma_j\left\{\Gamma_1 + 3(\gamma_i + 3)(\gamma_j + 3)\right\}a}{3\gamma_i\gamma_j\Gamma_1}
\end{aligned}
$$

$$B^N = \frac{9\gamma_j(\gamma_i + 3)\left\{\gamma_i(\gamma_j + 3) + (4\gamma_j + 9) - \gamma_i\right\}\beta_i + 9\gamma_i(\gamma_j + 3)\left\{\gamma_j(\gamma_i + 3) + (4\gamma_i + 9) - \gamma_j\right\}\beta_j - 3\gamma_i\gamma_j\Gamma_1\delta}{3\gamma_i\gamma_j\Gamma_1}$$

である。

(21)式を確率積分方程式として書き換えると、次式を得る。

$$S^N(t) = S_0 + \int_0^t \left[A^N - B^N S^N(s)\right]ds + \int_0^t \sigma S^N dw \tag{22}$$

ただし、上付のNは Markov 完全ナッシュ均衡を表す。

汚染ストックの経路の期待値は確率分布とは独立であり、次のようになる。

$$E[S^N(t)] = S_0 + \int_0^t \left[A^N - B^N E[S^N(s)]\right]ds \tag{23}$$

---

4 以下の議論については、 Prasad&Sethi (2004)を参照。

この式は、初期値$E[S^N(0)]=S_0$を有する、$E[S^N(t)]$ に関する常微分方程式として表現され、その解は次のように与えられる。

$$E[S^N(t)]=\exp(-B^N t)S_0+(1-\exp(-B^N t))A^N/B^N \tag{24}$$

経路の安定条件が成立するためには、$B^N>0$ である必要があり、そのためには、上述したように、 $\beta_i<0$ でなければならない。

ここで、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡の汚染ストックの期待値は、以下のように求められる。

$$E[\hat{S}^N]=\frac{A^N}{B^N} \tag{25}$$

ただし、 ^ は定常状態を表す。

(17)式と(25)式より、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡の排出税率の期待値は以下のように表される。

$$E[\hat{\tau}_i^N]=\frac{-3(\gamma_j+3)\gamma_i a-3(\beta_i E[\hat{S}^N]+\phi_i)(4\gamma_j+9)(\gamma_i+3)+3\gamma_i(\gamma_j+3)(\beta_j E[\hat{S}^N]+\phi_j)}{\Gamma_1} \tag{26}$$

次に、排出削減水準について見ることにする。(26)式を(9)式に代入すると、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡の排出削減水準の期待値は、次のように表される。

$$E[\hat{x}_i^N]=E[\hat{\tau}_i^N]/\gamma_i=\frac{-3(\gamma_j+3)\gamma_i a-3(\beta_i E[\hat{S}^N]+\phi_i)(4\gamma_j+9)(\gamma_i+3)+3\gamma_i(\gamma_j+3)(\beta_j E[\hat{S}^N]+\phi_j)}{\gamma_i\Gamma_1} \tag{27}$$

ここで、(14)式と(25)式より、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡の価値関数の期待値は、次のように表される。

$$E[\hat{V}_i^N]=(1/2)\beta_i(E[\hat{S}^N])^2+\phi_i E[\hat{S}^N]+\psi_i \tag{28}$$

４．協調均衡解

本節では、各国政府が協調し、汚染物質の蓄積過程(10)式の制約の下で、集団合理性を達成するために、各国の利得の和の（割引率ρで割り引かれた）期待割引現在価値を最大化するようにその排出税率を選択するものとする。各国政府の確率的動的最大化問題は、次式で表される。

$$V_T(S_0)=\max_{\tau_i,\tau_j} E\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho t} W_T\,dt\right) \qquad (29)$$
$$s.t.\ dS=\{E_1+E_2-\delta S\}dt+\sigma S dw, S(0)=S_0$$

ただし、$W_T=W_1+W_2$ である。

V_T は両国政府全体の価値関数であり、以下の Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を満足しなければならない。

$$\rho V_T = \max_{\tau_i,\tau_j}\left\{\begin{aligned}&\frac{(a-2\tau_i+\tau_j)^2}{9}+\frac{\tau_i^2}{2\gamma_i}+\frac{\tau_i\{\gamma_i a-(2\gamma_i+3)\tau_i+\gamma_i\tau_j\}}{3\gamma_i}+\frac{(a-2\tau_j+\tau_i)^2}{9}+\frac{\tau_j^2}{2\gamma_j}\\&+\frac{\tau_j\{\gamma_j a-(2\gamma_j+3)\tau_j+\gamma_j\tau_i\}}{3\gamma_j}-hS^2+V_T'\left\{\frac{2\gamma_i\gamma_j a-\gamma_i\gamma_j(\tau_i+\tau_j)-3(\gamma_i\tau_j+\gamma_j\tau_i)}{3\gamma_j}-\delta S\right\}+\frac{\sigma^2S^2}{2}V_T''\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

このゲームの linear-quadratic の構造から、価値関数は以下のようなSに関する２次関数であると考えられる。

$$V_T=(1/2)\beta_T S^2+\phi_T S+\psi_T \qquad (31)$$

(31)式より、次の式が得られる。

$$V_T'=\beta_T S+\phi_T \qquad (32)$$

$$V_T''=\beta_T \qquad (33)$$

(30)式の右辺の最大化から、排出税率に関して以下の式を得る。

$$\tau_i=\frac{9\gamma_i a-9(\beta_T S+\phi_T)\{(\gamma_i+3)+2(\gamma_j+3)\}}{(2\gamma_i+9)(2\gamma_j+9)-4\gamma_i\gamma_j} \qquad (34)$$

(30)式に(31)式の価値関数、(32)、(33)式と(34)式の最大化の条件を代入して係数比較を行うと、(31)式の価値関数のパラメータに関して、以下の式を得る。

$$\beta_T=\frac{(\rho+2\delta-\sigma^2)\gamma_i\gamma_j\Gamma_1{}^2-\sqrt{(\rho+2\delta-\sigma^2)^2\gamma_i{}^2\gamma_j{}^2\Gamma_1{}^4+8\gamma_i\gamma_j h\Gamma_1{}^2\Gamma_{14}}}{2\Gamma_{14}} \tag{35}$$

$$\phi_T=\frac{\Gamma_{17}\beta_T}{3\Gamma_{16}}a \tag{36}$$

$$\psi_T=\frac{\Gamma_{18}\phi_T^2+\Gamma_{19}\phi_T+\Gamma_{20}}{18\gamma_i\gamma_j\rho\Gamma_1^2} \tag{37}$$

ただし、

$$\Gamma_{14}=6\Gamma_1\left\{\gamma_j(\gamma_i+3)\Gamma_{15i}+\gamma_i(\gamma_j+3)\Gamma_{15j}\right\}$$
$$-9\left\{(2\gamma_i\gamma_j+9\gamma_j)\Gamma_{15i}{}^2+(2\gamma_i\gamma_j+9\gamma_i)\Gamma_{15j}{}^2+4\gamma_i\gamma_j\Gamma_{15i}\Gamma_{15j}\right\}$$

$$\Gamma_{15i}=(\gamma_i+3)+2(\gamma_j+3)$$

$$\Gamma_{16}=\left[9(2\gamma_i\gamma_j+9\gamma_j)\Gamma_{15i}{}^2+9(2\gamma_i\gamma_j+9\gamma_i)\Gamma_{15j}{}^2+36\gamma_i\gamma_j\Gamma_{15i}\Gamma_{15j}-6\gamma_j(\gamma_i+3)\Gamma_1\Gamma_{15i}-6\gamma_i(\gamma_j+3)\Gamma_1\Gamma_{15j}\right]\beta_T$$
$$+\gamma_i\gamma_j(\rho+\delta)\Gamma_1{}^2$$

$$\Gamma_{17}=27(2\gamma_i\gamma_j+9\gamma_j)\Gamma_{15i}\gamma_i+27(2\gamma_i\gamma_j+9\gamma_i)\Gamma_{15j}\gamma_j+54\gamma_i\gamma_j(\gamma_i\Gamma_{15j}+\gamma_j\Gamma_{15i})$$
$$+3\gamma_j\Gamma_1\left\{\gamma_i\Gamma_{15i}-3\gamma_i(\gamma_i+3)\right\}+3\gamma_i\Gamma_1\left\{\gamma_j\Gamma_{15j}-3\gamma_j(\gamma_j+3)\right\}+2\gamma_i\gamma_j\Gamma_1{}^2$$

$$\Gamma_{18}=81(-2\gamma_i\gamma_j-9\gamma_j)\Gamma_{15i}^2+81(-2\gamma_i\gamma_j-9\gamma_i)\Gamma_{15j}^2-324\gamma_i\gamma_j\Gamma_{15i}\Gamma_{15j}$$
$$+54\gamma_j(\gamma_i+3)\Gamma_{15i}+54\gamma_i(\gamma_j+3)\Gamma_{15j}$$

$$\Gamma_{19}=-162(-2\gamma_i\gamma_j-9\gamma_j)\gamma_i\Gamma_{15i}a-162(-2\gamma_i\gamma_j-9\gamma_i)\gamma_j\Gamma_{15j}a$$
$$+324\gamma_i\gamma_j^2\Gamma_{15i}a+24\gamma_i\gamma_j a+18\gamma_i\gamma_j a(\Gamma_{15i}+\Gamma_{15j})-54\gamma_i\gamma_j a(\gamma_i+\gamma_j+6)$$

$$\Gamma_{20}=81a^2\left\{(-2\gamma_i\gamma_j-9\gamma_j)\gamma_i^2+(-2\gamma_i\gamma_j-9\gamma_i)\gamma_j^2\right\}-4\gamma_i\gamma_i^2a^2(81\gamma_i-1)-18\gamma_i\gamma_j(\gamma_i+\gamma_j)a$$

である。

なお、β_Tに関しては正の共役解も存在するが、経路の安定条件のために、β_Tは負でなければならない。

次に、汚染ストックの経路について検討する。(10)式に最適な排出税率の式(34)を代入すると、次式を得る。

$$dS = \left[A^C - B^C S \right] dt + \sigma S dw,\ S(0) = S_0 \tag{38}$$

ただし、

$$A^C = \frac{\gamma_i \gamma_j \left\{ (2\gamma_i + 9)(2\gamma_j + 9) - 9(\gamma_i + \gamma_j) - 58\gamma_i\gamma_j \right\} a + 27\phi_T \left\{ \gamma_i\gamma_j(\gamma_i + \gamma_j + 6) + (\gamma_i + 3)(2\gamma_i + \gamma_j) + (\gamma_j + 3)(2\gamma_j + \gamma_i) \right\}}{3\gamma_i\gamma_j \left\{ (2\gamma_i + 9)(2\gamma_j + 9) - 4\gamma_i\gamma_j \right\}}$$

$$B^C = \frac{27\beta_T(\gamma_i + 3)(2\gamma_i + \gamma_j) + 27\beta_T(\gamma_j + 3)(2\gamma_j + \gamma_i) - 3\beta_T\gamma_i\gamma_j(\gamma_i + \gamma_j + 6) - 3\gamma_i\gamma_j\delta \left\{ (2\gamma_i + 9)(2\gamma_j + 9) - 4\gamma_i\gamma_j \right\}}{3\gamma_i\gamma_j \left\{ (2\gamma_i + 9)(2\gamma_j + 9) - 4\gamma_i\gamma_j \right\}}$$

である。

(38)式を確率積分方程式として書き換えると、次式を得る。

$$S^C(t) = S_0 + \int_0^t \left[A^C - B^C S^C(s) \right] ds + \int_0^t \sigma S^C dw \tag{39}$$

汚染ストックの経路の期待値は確率分布とは独立であり、次のようになる。

$$E[S^C(t)] = S_0 + \int_0^t \left[A^C - B^C E[S^C(s)] \right] ds \tag{40}$$

この式は、初期値 $E[S(0)] = S_0$ を有する、 $E[S(t)]$ に関する常微分方程式として表現され、その解は次のように与えられる。

$$E[S^C(t)] = \exp(-B^C t) S_0 + (1 - \exp(-B^C t)) A^C / B^C \tag{41}$$

ただし、上付の C は協調均衡を表す。

経路の安定条件が成立するためには、$B^C > 0$ である必要があり、そのためには、上述したように、$\beta_T < 0$ でなければならない。

ここで、定常状態における協調均衡の汚染ストックの期待値は、以下のように求められる。

$$E[\hat{S}^C] = \frac{A^C}{B^C} \tag{42}$$

(34)式と(42)式から、定常状態における協調均衡の排出税率の期待値は以下のように表される。

$$E[\hat{\tau}_i^{\,C}] = \frac{9\gamma_i a - 9(\beta_T E[\hat{S}^C] + \phi_T)\left\{ (\gamma_i + 3) + 2(\gamma_j + 3) \right\}}{(2\gamma_i + 9)(2\gamma_j + 9) - 4\gamma_i\gamma_j} \tag{43}$$

次に、排出削減水準について見ることにする。(43)式を(9)式に代入すると、定常状態における協調均衡の排出削減水準の期待値は、次のように表される。

$$E[\hat{x}_i^C] = E[\hat{\tau}_i^C]/\gamma_i = \frac{9\gamma_i a - 9(\beta_T E[\hat{S}^C] + \phi_T)\{(\gamma_i + 3) + 2(\gamma_j + 3)\}}{\gamma_i\{(2\gamma_i + 9)(2\gamma_j + 9) - 4\gamma_i\gamma_j\}} \tag{44}$$

さらに、(31)式と(42)式から、定常状態における協調均衡の価値関数の期待値は、次のように表される。

$$E[\hat{V}_T^C] = (1/2)\beta_T(E[\hat{S}^C])^2 + \phi_T E[\hat{S}^C] + \psi_T \tag{45}$$

ここで、Markov 完全ナッシュ均衡と協調均衡における各均衡値の期待値を比較すると、以下の命題が得られる。ただし、価値関数に関しては、協調均衡における両国政府全体の価値関数の期待値 $E[\hat{V}_T^C]$ と、Markov 完全ナッシュ均衡における各国政府の価値関数の期待値の和 $E[\hat{V}_1^N] + E[\hat{V}_2^N]$ とを比較する。

命題 1

定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡と協調均衡の汚染ストック、排出税率、排出削減水準および価値関数の期待値を比較すると、以下のような結果が得られる。

(i) 汚染ストックに関して、$E[\hat{S}^C] < E[\hat{S}^N]$ が成立する。

(ii) 排出税率に関して、$E[\hat{\tau}_i^N] < E[\hat{\tau}_i^C]$ が成立する。

(iii) 排出削減水準に関して、$E[\hat{x}_i^N] < E[\hat{x}_i^C]$ が成立する。

(iv) 価値関数に関して、$E[\hat{V}_1^N] + E[\hat{V}_2^N] < E[\hat{V}_T^C]$ が成立する。

5．サブゲーム整合的な解

本節では、Yeung & Petrosyan (2006) にしたがって、サブゲーム整合的な解を導出する。サブゲーム整合的な解とは、協調解を考えたときに、その解における戦略をより以後の開始時点と、事前の最適な行動によってもたらされる任意の実現可能な状態変数を伴う状況に拡張しても依然として最適であるような解のことである。ここで、各国間で利得が譲渡可能であると仮定する。

各国政府が、協調均衡において分配された期待利得と、非協調均衡（Markov 完全ナッシュ均衡）における期待利得との差の積を最大化するよう

な、すなわちナッシュ交渉解を満足するような、協調均衡における期待利得の和を分配する配分制度について、サブゲーム整合的な解を示す。

(39)式によって得られる時点tでの汚染ストックの解$S^C(t)$の実現可能な値の集合をZ_t^Cで表す。S_t^Cは、集合Z_t^Cにおける1つの要素を表す。ここで、初期時点をt_0とする協調ゲームを$\Gamma_c(S_0)$、初期時点をt_αとする協調ゲームを$\Gamma_c(S_{t_\alpha}^C)$と表すことにする。

合意された最適性原理にしたがって、各国政府間で協調均衡における期待利得が分配されるような、協調ゲーム$\Gamma_c(S_0)$を考える。汚染ストックがS_0である時点t_0において、$\xi_i(S_0)$は、期間$[t_0,\infty)$にわたって、各国政府間で合意された最適性原理にしたがって、協調均衡における期待利得の和から政府iが得る利得を示す。

また、合意された最適性原理にしたがって、各国政府間で協調均衡における期待利得が分配されるような、汚染ストックが$S_{t_\alpha}^C \in Z_{t_\alpha}^C$である時点$t_\alpha(\geq t_0)$から始まる協調ゲーム$\Gamma_C(S_{t_\alpha}^C)$を考える。$\xi_i(S_{t_\alpha}^C)$は、期間$[t_0,\infty)$にわたって、各国政府間で合意された最適性原理によって、協調均衡における期待利得の和から政府iが得る利得を示す。

このとき、$\xi(S_0)=[\xi_1(S_0),\xi_2(S_0)]$及び$\xi(S_{t_\alpha}^C)=\left[\xi_1(S_{t_\alpha}^C),\xi_2(S_{t_\alpha}^C)\right]$は、以下の条件を満足するならば、妥当な配分である。

定義1

ベクトル$\xi_i(S_0)$は、以下の条件を満足するならば、協調ゲーム$\Gamma_C(S_0)$の配分である。

（i）$\sum_{j=1}^{2}\xi_j(S_0)=V_T(S_0)$　　（パレート最適性の条件）　　(46)

（ii）$\xi_i(S_0)\geq V_i(S_0),\quad i=1,2$　　（個人合理性の条件）　　(47)

定義2

ベクトル$\xi_i(S_{t_\alpha}^C)$は、以下の条件を満足するならば、協調ゲーム$\Gamma_C(S_{t_\alpha}^C)$の配分である。

（ i ）　$\sum_{j=1}^{2}\xi_j(S_{t_\alpha}{}^C)=V_T(S_{t_\alpha}{}^C)$　　（パレート最適性の条件）　(48)

（ ii ）　$\xi_i(S_{t_\alpha}{}^C)\geq V_i(S_{t_\alpha}{}^C),\quad i=1,2$　（個人合理性の条件）　(49)

協調ゲーム$\Gamma_C(S_0)$において、時点$s\in[t_0,\infty)$で得る各国政府の利得ベクトルを、$B(s)=[B_1(s),B_2(s)]$と表すことにする。協調ゲーム$\Gamma_C(S_{t_\alpha}{}^C)$において、時点$t_\alpha\in[t_0,\infty)$で、汚染ストックが$S_{t_\alpha}{}^C\in Z_{t_\alpha}{}^C$であるということを所与として、以下の式が成立する。

$$\xi_i(S_{t_\alpha}{}^C)=E_{t_\alpha}\left\{\int_{t_\alpha}^{\infty}B_i(s)e^{-\rho(s-t_\alpha)}ds\middle|S(t_\alpha)=S_{t_\alpha}{}^C\right\},\quad i=1,2,\ S_{t_\alpha}{}^C\in Z_{t_\alpha}{}^C \tag{50}$$

また、時点$t\in[t_\alpha,\infty)$で、汚染ストックが$S_t^C\in Z_t^C$であるということを所与として、以下の式が成立する。

$$\xi_i(S_t^C)=E_t\left\{\int_t^{\infty}B_i(s)e^{-\rho(s-t)}ds\middle|S(t)=S_t^C\right\},\quad i=1,2,\ S_t^C\in Z_t^C \tag{51}$$

次に、協調ゲーム$\Gamma_C(S_0)$で、各国政府は協調均衡における期待利得の和を最大化し、ナッシュ交渉解を満足する協調均衡における期待利得の和を分配することに合意すると考える。

両国政府の、配分制度による利得と非協調均衡における期待利得との差の積を表すナッシュ積は、次のように表される。

$$\begin{aligned}&\{\xi_i(S_0)-V_i(S_0)\}\{\xi_j(S_0)-V_j(S_0)\}\\&=\Omega_i\left[V_T(S_0)-\sum_{j=1}^{2}V_j(S_0)-\Omega_i\right]\end{aligned} \tag{52}$$

ただし、$\Omega_i=\xi_i(S_0)-V_i(S_0)$である。

ナッシュ積の最大化から、以下の式が得られる。

$$\Omega_i=\frac{1}{2}\left[V_T(S_0)-\sum_{j=1}^{2}V_j(S_0)\right] \tag{53}$$

(50)式から、その配分制度は、Yeung & Petrosyan (2006)のProposition 5.8.1より、以下の命題を満足しなければならない。

命題2

協調ゲーム $\Gamma_C(S_0)$ において、時点 t_0 で、各国政府 i に以下の $\xi_i(S_0)$ が分配される。

$$\xi_i(S_0) = V_i(S_0) + \frac{1}{2}\left[V_T(S_0) - \sum_{j=1}^{2} V_j(S_0)\right],\ i = 1,2 \tag{54}$$

また、協調ゲーム $\Gamma_C(S_{t_\alpha}{}^C)$ において、時点 $t_\alpha \in [t_0, \infty)$ で、各国政府 i に以下の $\xi_i(S_{t_\alpha}{}^C)$ が分配される。

$$\xi_i(S_{t_\alpha}{}^C) = V_i(S_{t_\alpha}{}^C) + \frac{1}{2}\left[V_T(S_{t_\alpha}{}^C) - \sum_{j=1}^{2} V_j(S_{t_\alpha}{}^C)\right],\ i = 1,2 \tag{55}$$

ここで、政府 i が命題2に従って協調均衡における期待利得の和を分配することに合意するような利得配分制度が得られるが、その利得配分制度において、協調ゲーム $\Gamma_C(S_0)$ のサブゲーム整合的な解をもたらす時点 $t_\alpha \in [t_0, \infty)$ における利得 $B_i(t_\alpha)$ は、Yeung & Petrosyan (2006) の Theorem5.8.3より、以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
B_i(t_\alpha) &= \frac{1}{2}\left\{\rho V_i(S_{t_\alpha}{}^C) + \rho V_T(S_{t_\alpha}{}^C) - \rho V_j(S_{t_\alpha}{}^C)\right\} - \frac{\sigma^2 (S_{t_\alpha}{}^C)^2}{4}\left\{V_i''(S_{t_\alpha}{}^C) + V_T''(S_{t_\alpha}{}^C) - V_j''(S_{t_\alpha}{}^C)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{V_i'(S_{t_\alpha}{}^C) + V_T'(S_{t_\alpha}{}^C) - V_j'(S_{t_\alpha}{}^C)\right\}(E_1 + E_2 - \delta S_{t_\alpha}{}^C) \\
&= \frac{1}{2}\left[\rho\left\{\beta_i (S_{t_\alpha}{}^C)^2 + \phi_i S_{t_\alpha}{}^C + \psi_i\right\} + \rho\left\{\beta_T (S_{t_\alpha}{}^C)^2 + \phi_T S_{t_\alpha}{}^C + \psi_T\right\} - \rho\left\{\beta_j (S_{t_\alpha}{}^C)^2 + \phi_j S_{t_\alpha}{}^C + \psi_j\right\}\right] \\
&\quad - \frac{\sigma^2 (S_{t_\alpha}{}^C)^2}{4}\left\{\beta_i + \beta_T - \beta_j\right\} - \frac{1}{2}\left\{(\beta_i S_{t_\alpha}{}^C + \phi_i) + (\beta_T S_{t_\alpha}{}^C + \phi_T) - (\beta_j S_{t_\alpha}{}^C + \phi_j)\right\}(A^C - B^C S_{t_\alpha}{}^C)
\end{aligned} \tag{56}$$

6．結論と今後の課題

本稿は、2国の企業が第3国の市場に財を供給し、各国企業が汚染物質を排出するような財の生産を行っているが、同時に排出削減投資を行うような状況を想定した。また、汚染物質の蓄積過程に不確実性が生じるものとした。その

ような状況で、各国政府間で行われる排出税ゲームを確率微分ゲームの枠組みで分析し、Markov 完全ナッシュ均衡解および協調均衡解を導出し、比較を行った。比較の結果、汚染ストックに関しては Markov 完全ナッシュ均衡の方が大きく、排出税率、排出削減水準、価値関数に関しては協調均衡の方が大きいという結果が得られた。また、各国間で利得が譲渡可能なケースを想定し、サブゲーム整合的な解を導出した。

現実に、地球温暖化や酸性雨など、問題解決のために各国間の協調が不可欠な国際的な環境問題が存在するが、京都議定書などに見られるように、協調の実現は困難である。本稿の分析は、利得が譲渡可能であるという想定の下で、不確実性下において国際的な環境問題の解決のために協調が実現できるような利得配分制度を示したものである。

本稿の分析には、以下のような問題点がある。まず、本稿では2国間のケースを分析しているが、より現実的には多国間のケースを分析する必要がある。また、本稿では各国間で利得が譲渡可能なケースを想定したが、各国間で利得が譲渡可能でないケースについても分析する必要がある。以上のような点で本稿の分析を拡張することが、今後の課題である。

参考文献

Barrett, S., 'Strategic Environmental Policy and International Trade,' *Journal of Public Economics*, vol.54, 1994, pp.325-338.

Brander, J.A. and B.J. Spencer, "Export Subsidies and International Market Share Rivalry," *Journal of International Economics*, vol. 18, 1985, pp.83-100.

Chang, F.R., *Stochastic Optimization in Continuous Time*, Cambridge University Press, 2004.

Dockner, J. and G. Feichtinger, "On the Optimality of Limit Cycles in Dynamic Economic Systems," *Journal of Economics*, vol.53, No.1, 1996, pp.31-50.

Dockner, E., Jorgensen, J., Long, N.V. and G. Sorger, *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press, 2000.

Kamien, M.I. and N.L. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management(2nd Edition)*, North-Holland, 1991.

Katsoulacos, Y. and A. Xepapadeas, 'Environmental Innovation, Spillovers and

Optimal Policy Rules,' in C. Carraro, Y. Katsoulacos and A. Xepapadeas (ed.), *Environmental Policy and Market Structure*, pp.143-150, Kluwer Academic Publishers, 1996.

Kort, P.M., "Pollution Control and the Dynamics of the Firm: The Effects of Market-Based Instruments on Optimal Firm Investments," *Optimal Control Applications & Methods*, vol.17, 1996, pp.267-279.

Prasad, A. and S.P. Sethi, "Competitive Advertising under Uncertainty: A Stochastic Differential Game Approach," *Journal of Optimization and Applications*, vol. 123, no.1, 2004, pp.163-185.

Reynolds, S.B., "Capacity Investment, Preemption and Commitment in an Infinite Horizon Model," *International Economic Review*, vol. 28, no.1, 1987, pp.69-88.

Seierstad, A. and K. Sydsaeter, *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, 1987.

Stimming, M., "Capital Accumulation subject to Pollution Control: Open-loop versus Feedback Investment Strategies," *Annals of Operations Research*, vol. 88, 1999, pp.309-336.

Wirl, F., "International Greenhouse Gas Emissions when Global Warming is a Stochastic Process," *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol.20, 2004, pp.95-114.

Yeung, W.K.D. and L.A. Petrosyan, *Cooperative Stochastic Differential Games*, Springer, 2006.