〈論　　文〉

若年・老年の交流社会における余暇市場の導入と逆方向の所得移転政策の可能性[1)]

グスタボ・バルダス

要　　約

本稿は若年世代と老年世代とがお互いに余暇を通じて触れ合う社会を問題とする。人々は余暇を異世代の人と共に過ごすことを希望するが、共有したい余暇時間は必ずしも一致しない。そこで、事情の異なる両世代が余暇を共有するためには交渉が必要であり、市場が形成されなければならない。そこでは、両世代が合意を得るために、対価、即ち、妥協によって生じる不満足を埋め合わすための金銭的な補償が必要となる。

分析の中心テーマは、①余暇に対する対価の負担者がどう決まるか、②政府の所得移転政策介入による厚生改善の可能性である。①の結論は、対価を負担する世代は、賦与には依存せず、選好の違いと人口成長率によって決まることである。また、②の結論として、現実の政策とは逆方向の若年世代への所得移転を行った場合にもパレート改善の可能性が導かれる。

Keywords: Income Transfers. Generation. Old. Young. Leisure. Shared Leisure. Transfers. Pareto-improving.

---

1)本稿は、日本経済学会2000年度春期大会（於、横浜市立大学）で報告され、英語版は Osaka City University *Economic Review* に投稿されている。

はじめに

従来の経済研究では、自由競争経済のメリットと政府介入による経済効率の改善を分析の主要テーマとしてきた。最近では異世代間の所得移転によって、全世代の厚生水準を低下させることなく改善することが可能か否かが頻繁に議論されている。とりわけ、若年世代から老年世代への所得移転を目的とする賦課方式の年金制度の問題については多くの研究者によって分析されてきた。

人口成長率が利子率を上回る場合には、政府が賦課方式の年金を導入することによって、厚生を改善できることは黄金律として知られているが、例えば、多くの国で年金制度を導入したものの人口成長率が低下し、厚生が悪化する等の問題も表面化している。このような問題の解決策として、例えば、Homburg (1990)は内生的な労働供給と所得に依存する年金負担モデルを用いて、賦課方式制度ではパレート非効率となるが、パレート改善が可能な移動経路が存在し、積立方式制度に移行できることを証明している。これに対して、Brunner (1996) は同質ではない個人を仮定すれば、年金の負担も同質でなくなり、このモデルの非現実性を主張する。

本稿では、先人達が発展させてきた世代間の所得移転問題を踏まえた上で、新たな視点として、若年世代と老年世代がお互いに余暇を通じて触れ合う社会を問題とする。それぞれの世代の人々は余暇を単独・同世代で過ごすだけではなく、異世代の人々と共に過ごすことを希望する。そのメリットとしては、例えば、人生経験が豊富な先輩から若い後輩への学習蓄積の伝承のようなものとしてイメージされる。即ち、若年世代にとっては、貴重な経験と能力を教えられ失敗を回避できるというメリットが生じ、老年世代にとっては自分の生涯の価値を評価し、尊敬、生き甲斐と満足を得ることができる。

価値観や賦与が異なる両世代が共有したい余暇時間は必ずしも一致しない。余暇を共有するためには交渉が必要であり、市場が形成されなければならない。両世代が合意を得るためには対価、即ち、妥協による不満を埋め合わすための金銭的な補償が必要となる。分析の中心となるテーマは、①状況によって、対

価の負担者がどう決まるか。②自由競争経済に政府が介入した場合、厚生改善が可能か否かである。①の結論は、対価を負担する世代は、賦与には依存せず、選好の違いと人口成長率によってのみ決まることである。また、②の結果では、現実の政策とは逆方向の若年世代への所得移転を行った場合にもパレート改善が可能であることが示される。

なお、若年世代への所得移転政策というテーマについては Kaganovich and Zilcha (1999)があり、教育による人的資本への投資が、生産性の向上を通じて経済成長率と厚生に与える効果を分析している。しかし、本稿では、若年世代への一般の所得移転政策について、生産性への影響を問題にしなくても、経済にプラスの影響を与える可能性があることが示された。

本稿の構成は以下の通りである。第1節でモデルを紹介し、第2節で共有余暇に対する対価の負担者を決定し、第3、4節で所得移転政策による厚生改善についての分析を行った。証明及び計算は数学付録にまとめてあるが、より詳細な計算が必要であれば、資料の提供は可能である。

1．モデル

２期間重複世代モデルを考えており、経済主体である家計は若年期を経て老年期を迎える。各期間には「若年世代」と「老年世代」の２世代の家計が共生し、各世代には多数の非利他主義の家計が存在しこれらはどれも同質であるとする。家計数の成長率は $n>-1$ である。

期間については $t=1, 2\cdots\infty$ 無限まで続き、$t=1$に生まれる世代を「１世代」、$t=2$に生まれる世代を「２世代」と呼ぶ。ただし、$t=1$の時は１世代の他に老年世代として生まれる「初世代」が存在する。

個々の家計は時間と保存できない消費財を賦与される。若年期、老年期の消費財賦与を $w^y>0$、$w^o>0$ （上付き y、o が "youth" ,"old" を表す）とする。

人々は消費と余暇を享受する。ただし、余暇については、単独でも、他世代と共有してでも享受できるものと仮定する。家計は自由に賦与を取引できるが、

異世代間の貸し借りはできない。なぜなら、老年世代は期末に死ぬので若年世代に返済できないからである。同様に逆の貸し借りもできない。また、同世代間の貸し借りもできない。同質の世代を仮定しており、貸し手と借り手は同時に生まれないからである。他方、余暇については、若年世代と老年世代が共有する時間およびその対価に関して合意し、契約を結ぶことによって取引が可能である。ただし、契約は異世代の２家計間のみで成立するものとする。

両世代の家計は完全競争の下で市場状況に従い、余暇１単位に対してそれぞれ正の金銭的価値を提示する。両者の差額を「対価」あるいは「価格」と呼び、老年世代から若年世代に対価を支払う場合を $w>0$とする、受け取る場合を $w<0$とする。

$w<0$になる場合としては、①人口成長率が高く、家計数において若年世代が老年世代に比べ多い場合、②若年世代が、老年世代とともに過ごすことを選好する場合、③老年世代が、単独で過ごすことを選好する場合、等が考えられる。逆は逆だろう。$w=0$となるケースもあるが特殊な場合に限られる。

問題とする論点は、次の２つである。①余暇市場で決定された対価を若年世代と老年世代のいずれが負担することになるのか。②政府が世代間の所得移転政策を管理することにより、すべての世代の厚生水準を改善できるか否か。

1.1. 家計の行動モデル

a. 効用関数

t 世代の家計が若年期に費やす消費・時間について次の記号を用いる。

a_t^y　：　消費（上付き "y " が "youth" 若年を表す）、

ℓe_t^{iy}　：　単独で過ごす時間（上付き " iy" が "individual time" 単独と "youth" 若年を表す）、

ℓe_t^{sy}　：　共に過ごす時間（上付き "sy " が "share time" ともに "youth" 若年を表す）。

老年期（"old"）についても同様に表記する。

消費と余暇を享受して得られる若年期の効用をU_t^y、老年期の効用を U_t^o とすれば、生涯の効用は次のような関数の和で表される。

$$U_t = U_t^y\left(a_t^y, \ell e_t^{iy}, \ell e_t^{sy}\right) + U_t^o\left(a_t^o, \ell e_t^{io}, \ell e_t^{so}\right) \tag{1}$$

ここでは、Cobb-Douglas 型効用関数を特定する。

$$U_t^y = \alpha_y \ln\left(a_t^y\right) + \beta_y \ln\left(\ell e_t^{iy}\right) + \gamma_y \ln \ell e_t^{sy} \tag{2}$$

$$U_t^o = \alpha_o \ln\left(a_t^o\right) + \beta_o \ln\left(\ell e_t^{io}\right) + \gamma_o \ln \ell e_t^{so} \tag{3}$$

ただし、$\alpha_y, \beta_y, \gamma_y, \alpha_o, \beta_o, \gamma_o > 0$ のパラメータである。

b. 時間と所得制約

時間の賦与を１に標準化する。若年世代が単独で過ごす時間ℓe_t^{iy} と他の世代と過ごす時間ℓe_t^{sy} を足し合わせると１になる。老年世代に対して同じことが言えるので

$$\begin{aligned} \ell e_t^{iy} + \ell e_t^{sy} &= 1 \\ \ell e_t^{io} + \ell e_t^{so} &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

になる。

若年期の純所得は消費財の賦与 u^yと余暇を共有することから得られる対価 $w_t \ell e_t^{sy}$ である。同様に老年期の所得は $u^o - w_{t+1} \ell e_t^{so}$である。

さらに、これら家計の純所得の他に政府による税金と所得移転を考える。

μ ：若年期が受け取る一括所得移転（負の時、税金）

ε ： が老年期に支払う税金（負の時、移転）

R_{t+1} を１プラス利子率とすれば、所得予算制約は次のように書ける。

$$u^y + w_t \ell e_t^{sy} + \mu + \frac{u^o - \varepsilon}{R_{t+1}} = a_t^y + \frac{a_t^o + w_{t+1} \ell e_t^{so}}{R_{t+1}} \tag{5}$$

c. 最適化問題

c.1. 一般世代の効用最大化問題（初世代を除く）

第 t 世代の家計の効用最大化問題を所得と時間制約の下で、次のように表す。

$$W_t = \underset{(a_t^y, a_t^o, \ell e_t^{sy}, \ell e_t^{so})}{Max} U_t = \alpha_y \ln(a_t^y) + \beta_y \ln(1-\ell e_t^{sy}) + \gamma_y \ln \ell e_t^{sy} + \alpha_o \ln(a_t^o) + \beta_o \ln(1-\ell e_t^{so}) + \gamma_o \ln \ell e_t^{so}$$

$$s.t. \quad u^y + w_t \ell e_t^{sy} + \mu + \frac{u^o - \varepsilon}{R_{t+1}} = a_t^y + \frac{a_t^o + w_{t+1} \ell e_t^{so}}{R_{t+1}} \tag{6}$$

最大化の一階条件は次の式で表される。

$$\begin{aligned} &\alpha_y \frac{w_t}{a_t^y} + \frac{\gamma_y}{\ell e_t^{sy}} = \frac{\beta_y}{1-\ell e_t^{sy}} \\ &\frac{\gamma_o}{\ell e_t^{so}} - \frac{\beta_o}{1-\ell e_t^{so}} = \alpha_y \frac{w_{t+1}}{a_t^y} \frac{1}{R_{t+1}} \\ &\frac{\alpha_y}{a_t^y} \frac{1}{R_{t+1}} = \frac{\alpha_o}{a_t^o} \end{aligned} \tag{7}$$

若代期の貯蓄は$u^y + \mu + w_t \ell e_t^{sy} - a_t^y$ である。非利他主義を仮定しており、老年期には所得のすべてを消費するので

$$u^o - w_{t+1} \ell e_t^{so} - \varepsilon = a_t^o \tag{8}$$

になる。

c.2. 初世代の効用最大化問題

若年期のない初世代を特別に扱い、最大化問題を次のように表す。

$$\begin{aligned} &W_0 = \underset{(a_t^o, \ell e_t^{so})}{Max} U_0 = \alpha_o \ln(a_0^o) + \beta_o \ln(1-\ell e_0^{so}) + \gamma_o \ln \ell e_0^{so} \\ &s.t. \quad u^o - \varepsilon = a_0^o + w_1 \ell e_0^{so} \end{aligned} \tag{9}$$

最大化問題の一階条件は次の式で表される。

$$\frac{\gamma_o}{\ell e_0^{so}} = \frac{\alpha_o}{a_0^o} w_1 + \frac{\beta_o}{1-\ell e_0^{so}} \tag{10}$$

1.2. 資本市場と余暇市場の均衡条件

資本市場の均衡条件に従って、経済全体の純貯蓄はゼロになる。これは次の式で表される。

$$u^{y} + \mu + w_t \ell e_t^{sy} - a_t^{y} = 0 \tag{11}$$

余暇市場の均衡条件に従って、若年世代と老年世代が共有する余暇の時間が等しくなる。

$$\ell e_t^{sy}(1+n) = \ell e_{t-1}^{so} \tag{12}$$

2．余暇の対価を負担すべき世代の決定

両世代が対価を負担せずに余暇を共有することもあり得るが、一般的にはどちらかの世代がその対価を負担する。余暇に対して両世代が異なる金銭的価値を提示するからである。以下では、どのような条件の下で、老年世代が負担し、あるいは、若年世代が負担することになるのかを考察する。

(12) 式の両辺に w_{t+1} を乗じて

$w_{t+1}\ell e_{t+1}^{sy}(1+n) = w_{t+1}\ell e_t^{so}$ 「共有余暇に対する対価の支払と受取の均衡式」

が得られる。左辺、右辺をそれぞれ、を若年世代、老年世代が授受する共有する余暇に対する対価の関数 f_1, f_2 とする。すなわち、$f_1(\ell e_t^{so}) = w_{t+1}\ell e_{t+1}^{sy}(1+n)$ 、

($w_{t+1} > 0$であれば、受取り、$w_{t+1} < 0$であれば、支払い) とし、$f_2(\ell e_t^{so}) = w_{t+1}\ell e_t^{so}$

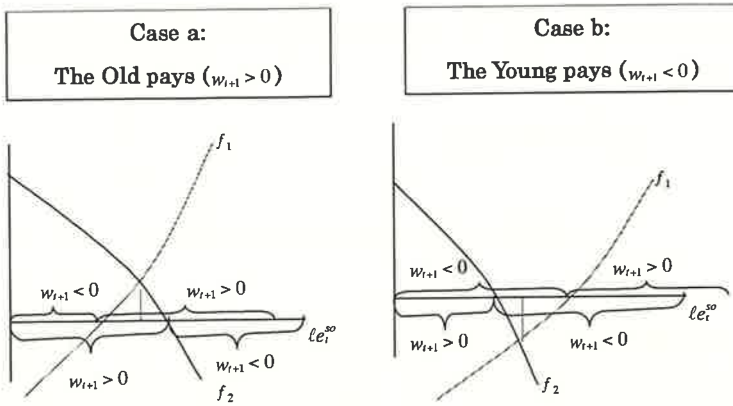
($w_{t+1} > 0$ であれば、支払い、$w_{t+1} < 0$ であれば、受取り)。

余暇の共有の時間 ℓe_t^{so} の関数として f_1, f_2 を描くと、図１のようになる (詳細は付録の第４・５節の数学分析を参照)。

均衡点において、f_1 と f_2の値が、正になる場合 "Case a" と、負になる場合 "Case b" が起こる。

Case a と Case b は選好・人口成長率・賦与に依存しており、これらの因果関係を命題として分類した。(数学付録の第6節を参照)

図1：共有余暇対価の均衡におけるw_{t+1}



命題 1: *共有する余暇に対する対価が正になる（老年世代が払う）ための必要・十分条件は（13）式である。*

$$w_t \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma_o}{\beta_o+\gamma_o} \leq \frac{\gamma_y}{\beta_y+\gamma_y}(1+n) \tag{13}$$

(13) 式におけるβ_y 、γ_y はそれぞれ、若年期に単独、共有して過ごす余暇の効用関数のパラメータであり、β_o 、γ_o はそれぞれ、老年期におけるものである。従って、この条件を満たすことは、① $\frac{\gamma_y}{\beta_y+\gamma_y}$ が高い若年世代は、老年世代と過ごすことをより楽しく感じ、② $\frac{\gamma_o}{\beta_o+\gamma_o}$ が低い老年世代は、単独で過ごした方が楽しいことを示している。さらに、③人口成長率 n が高ければ、若年世代の家計数が多くなり、老年世代による買い手市場となり、若年

世代が対価を支払いことになるものと解釈できる。

(13) 式で注意すべきことは、f_1,f_2に賦与、税金と所得移転のパラメータが含まれているが、対価が正、負になるかの決定には、これらに依存しないことであり、政府が所得移転政策を管理しても負担者を変えられないことを示している。(付録の第4・5節)

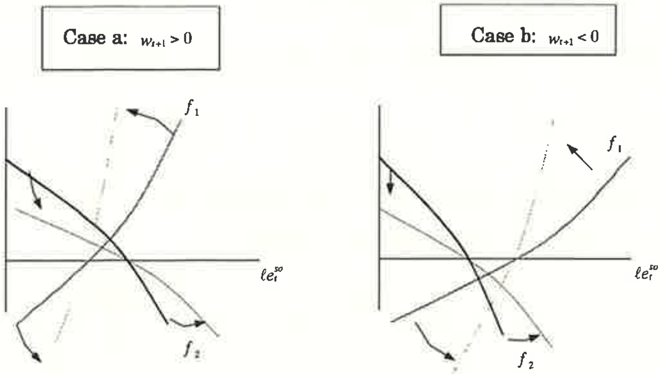
3.　所得移転政策の効果分析

3.1. 所得移転政策による余暇共有の促進は可能か。

異世代間の対価の授受が所得移転政策によってどう影響するかを分析するために、図1における曲線 f_1,f_2 を用いて考察する。

政府が若年世代への所得移転政策を推進（$\mu>0$を増加させる）すると、数学付録第4・5節で証明されるように、f_1 とf_2 曲線は横軸（余暇の共有時間）との交点を中心に反時計周りに回転移動する。[2)]

図2：若年世代への所得移転政策による余暇の変化



2)このとき、f_1 と f_2 の交点として求められる対価 w_{t+1} の水準は変わるが、符号は変わらない。政策によって両曲線の傾きの符号は変わらないからである。(付録第4・5節、(30) 式と (33) 式を参照)

命題 2: *若年世代への所得移転政策により、余暇の共有時間を延長できるための必要・十分条件は若年世代がその対価を負担している場合に限る。*

$$\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu} > 0 \Leftrightarrow w_{t+1} < 0 \tag{14}$$

3.2. 所得移転政策による効用改善が可能か。

この節では、世代間の所得移転政策により各世代の効用に及ぼす影響について、政府が全く介入しない市場経済と比較して分析する。そこで、所得移転パラメータ μ の変化に対して、（6）式で定義した t 世代についての間接効用関数 （$t=0,1\cdots\infty$）の変化、すなわち、$\frac{dW_t}{d\mu}$ を分析する。ただし、$\mu>0$（$\mu<0$）のときに、若年世代（老年世代）への所得移転を示す。

数学付録、節７．４．c で証明されるように、1世代を含め、それ以降のすべての世代についての効用変化、$\frac{dW_t}{d\mu}$ は世代に依存せずに次のように書ける。

$$\frac{dW_t}{d\mu} = \frac{dW_0}{d\mu}\left(1 - \frac{R}{1+n}\right) \tag{15}$$

ただし、$\frac{dW_0}{d\mu}$ は初世代の効用変化で、R は１プラス介入がない利子率である。以後の表記についても期間を示す下付き添え字がない変数は介入のない経済を示す。

命題　3: ①*若年世代への所得移転によって効用をパレート - 改善できるための必要・十分条件は次の通りである。*

$$\text{and} \quad R < 1+n \qquad \frac{dW_0}{d\mu} > 0 \tag{16-a}$$

②*老年世代への所得移転によって効用をパレート - 改善できるための必要・十分条件は次の通りである*

$$\text{and} \quad R < 1+n \qquad \frac{dW_0}{d\mu} < 0 \tag{16-b}$$

付録、節７.4.c で証明されるように、

①若年世代への所得移転がパレート - 改善できるための必要条件は $w > 0$ であり、

②老年世代への所得移転がパレート - 改善でできる十分条件は $w < 0$ である。

① の場合、パレート - 改善可能であるための必要・十分条件をパラメータを用いて表現でするのは困難である。そこで、付録、節７．４．c で十分条件を別に求め、妥当な政策が存在することを証明した。すなわち、パレート - 改善可能であるための十分条件の一つの表現として、均衡での余暇を共有する時間の範囲（17）式が得られ、実際に、十分条件を満たすような共有する余暇時間 ℓe_t^{sy} が実在することが付録、節７．４．c で確認された。

$$\frac{M\left(\alpha_y+\gamma_y\right)+\gamma_y}{\beta_y+\gamma_y+M\left(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y\right)} < \ell e_t^{sy} < \frac{A\gamma_y(1+n)+\gamma_o}{A\left(\beta_y+\gamma_y\right)+\beta_o+\gamma_o} \tag{17}$$

ただし、

$$M = \frac{\dfrac{\alpha_y u^o}{\alpha_o u^y}-1}{\dfrac{\alpha_y}{\alpha_o}(1+n)+1} \quad \text{and} \quad A = \sqrt{\frac{\alpha_o\beta_o}{\alpha_y\beta_y}\frac{1}{(1+n)}}$$

M について考察すれば、$\dfrac{u^o}{u^y}$ が十分に小さい時に、範囲の幅は広くなり、ℓe_t^{sy} が（17）式を満たすための条件は緩くなる。さらに、$\dfrac{u^o}{u^y} < (1+n)$ のとき、α_o が低いほど、上と同様に（17）式を満たしやすい。

共に過ごす余暇時間の対価が老年世代に支払われる場合、なぜ、若年世代へ

の所得移転政策が直感的に説明してみよう。

(17)式が満たされる場合、現状の年金政策と逆の方向に、老年世代から若年世代への所得移転が推進されることにより、すべての世代の効用が改善されることが示されたが、その経済学的なメカニズムを説明する。

政策による老年世代の反応は次のようにイメージできる。まず、税金を払うため可処分所得が減る。余暇を共有する対価は老年世代が負担しているので、その費用を削減しようとする。つまり、共に過ごす時間を減らし、その結果単独で過ごす時間が増える。税金で徴収される金額以上に対価を削減できれば、消費を増やすことができる。最終的に、単独で過ごす時間と消費の拡大により改善される効用の大きさが、余暇を共有する時間を減らすことにより失う効用の低下よりも大きければ、老年世代の効用が改善される。つまり、初世代、老年世代の効用が上がる。

他方、若年世代については老年世代とは対称的な反応がイメージできる。まず、所得移転を受け取るため可処分所得が増える。しかしながら、老年世代が、共有する余暇を減らし、受け取る対価が減ってしまうので、全所得が減少してしまう。その結果、消費は減少し、共有する余暇を減らして単独時間が増える。若年期の効用だけを議論すれば、低下してしまうことも考えられる。しかし、利子率が人口成長率よりも高い時には生涯の効用が改善されることから、老年期に改善される効用が若年の効用低下以上に大きいことがうかがえる。

4.まとめ及び今後の課題

本稿で提案したいのは、若年世代と老年世代とが余暇を享受する社会における余暇市場モデルであり、市場の形成と対価の発生は必然的なものであると考えている。もし、余暇の共有に対するの対価をだれも払おうとしなければ、両世代が需要する余暇の時間は偶然の場合以外に一致せず、どちらか不満の犠牲が強いられる。

1）対価を負担すべき世代は、各世代の選好とサイズ（人口成長率）に依存

することが示された。

若年世代が対価を負担するのは、①若年世代は余暇を老年世代と共に過ごすことを好み、②老年世代は単独で過ごすことを好み、③人口成長率 が高く、若年世代の家計が多くなり、老年世代と過ごすことに対する競争が激しくなる場合である。

2）対価が正になるか負になるかは、賦与、税金と所得移転に依存せず、政府が所得移転政策を管理しても負担者を変えられない。

3）政府が所得移転政策に介入し、パレート改善を図る場合には、①老年世代から若年世代への所得移転、 ②逆方向への所得移転の可能性がある。①の場合、老年世代が市場での余暇の対価を負担することが必要であり、②の場合の十分性は対価を若年が負担することである。いずれの場合も、人口成長率が利子率を上回ることが必要条件となる。

4）本稿のモデルでは、賦与の経済を考えており、生産過程を導入することが今後の課題として残される。これにより、余暇市場と労働市場におけるお互いの依存関係を一般均衡モデルとして扱うことが可能になり、余暇の対価と賃金の関係を分析できる。さらに、今回の負担者の決定では、賦与に依存しないことが特徴であったが、資本を考慮することによって、対価の負担者に関する本稿の結論に変化が生じる場合が発生することも期待される。

謝辞

I am grateful to all participants of the Friday's Seminar at Osaka City University and particularly to Professor Tetsuya Nakajima, Professor Makoto Mori and Professor Yoshitaka Hattori of Osaka City University for the comments they did on this and on earlier versions of this paper. I am also grateful to Professor Akihisa Shibata of the Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University for his suggestions on this paper. Last but not least, my debt with Professor Yoshihiko Seoka has reached a non-repayable level; I am grateful to him because it was with his suggestions, comments and new ideas that this paper was possible. Finally, I extremely grateful to Assistant Professor Kyoshi Fukase because he patiently helped me to translate this paper into Japanese.

文献目録

Azariadis, Costas (1995) Intertemporal Macroeconomics. Blackwell.

Bardas, Gustavo(2001), "Intergenerational transfers policies in a model with a market of shared leisure", Osaka City University Economic Review, Vol 36 No.2.

Bardas, Gustavo (2001-forthcoming), "Who should pay higher taxes, females or males?", Journal of Economic Behavior and Organization.

Breyer Friedrich (1989) On the Intergenerational Pareto Efficiency of Pay-as-you-go Financed Pension Systems. Journal of Institutional and Theoretical Economics (JITE) 145, 643-658.

Brunner Johann K. (1994) Redistribution and the Efficiency of the Pay-as-you-go Pension System. Journal of Institutional and Theoretical Economics (JITE) 150/3, 511-523.

Hansson Ingemar, Stuart Charles, (1989) Social Security as Trade Among Living Generations. The American Economic Review.

Homburg Stefan, (1990), The Efficiency of Unfunded Pension Schemes. Journal of Institutional and Theoretical Economics (JITE) 146, 640-647.

Kaganovich M, Zilcha Itzhak, (1999), Education, social security, and growth. Journal of Public Economics 71,289-309.

数学付録 1)

1．モデルの方程式

ここでは、モデルの方程式を(A-1)，(A-2)等で名称して、まとめる。方程式(A-1)～(A-3)は家計の効用最大化の一階条件である。方程式(A-4）と（A-5）は時間と賦与の制約である。(A-6)は共に過ごす余暇時間市場の均衡条件である。（A-7)式は、家計が老年期に所得を消費し切ることを示す。借金市場の均衡式は(A-8)式で表される。最後の式は政府の予算制約である。

$$\alpha_y \frac{w_t}{a_t^y} + \frac{\gamma_y}{\ell e_t^{sy}} = \frac{\beta_y}{1-\ell e_t^{sy}} \tag{A-1}$$

$$\frac{\gamma_o}{\ell e_t^{so}} - \frac{\beta_o}{1-\ell e_t^{so}} = \alpha_y \frac{w_{t+1}}{a_t^y} \frac{1}{R_{t+1}} \tag{A-2}$$

$$R_{t+1} = \frac{\alpha_y a_t^o}{\alpha_o a_t^y} \tag{A-3}$$

$$\ell e_t^{iy} + \ell e_t^{sy} = 1 \tag{A-4}$$

$$\ell e_t^{io} + \ell e_t^{so} = 1 \tag{A-5}$$

$$\ell e_t^{sy}(1+n) = \ell e_{t-1}^{so} \tag{A-6}$$

$$u^o - w_{t+1}\ell e_t^{so} - \varepsilon = a_t^o \tag{A-7}$$

$$\mu(1+n) = \varepsilon \tag{A-8}$$

$$u^y + \mu + w_t \ell e_t^{sy} = a_t^y \tag{A-9}$$

モデルは9本の方程式と $\ell e_t^{iy}, \ell e_t^{si}, \ell e_{t-1}^{io}, \ell e_{t-1}^{so}, a_{t-1}^o, a_t^y, R_{t+1}, w_{t+1}, \varepsilon$ の9個の内生変数になる。

変数とパラメータの定義は次のとおりである。

---

1)この数学より詳細な計算が必要であれば、資料の提供は可能である。

内生変数

ℓe_t^{iy}= t 世代が若年期の単独で享受する余暇

ℓe_t^{si}= t 世代が若年期の他世代と共に享受する余暇

ℓe_{t-1}^{io}= $t-1$ 世代が老年期に単独で享受する余暇

ℓe_{t-1}^{so}= $t-1$ 世代が老年期の他世代と共に享受する余暇

a_t^y= t 世代の若年期の消費

a_{t-1}^o= $t-1$ 世代の老年期の消費

R_{t+1}= 利子要素（1プラス利子率）

w_{t+1}= $t+1$ 期間に市場での余暇時間への対価

ε = 老年世代が支払う一括税

パラメータと外生変数

μ =若年世代への移転パラメータ

n =人口成長率

$\alpha_y, \beta_y, \gamma_y, \alpha_o, \beta_o, \gamma_o$ = 家計の効用関数のパラメータ

u^y, u^o= 老年期と若年期の消費財賦与

2．ともに過ごす余暇市場の存在

若年世代の人々と老年世代の人々が共に過ごす余暇時間を合意するが、それに対して、対価が常に $w_t=0$ であるといった理由で、市場が存在しなければ、$t+1$の時に共生する世代の共に過ごす時間の需要は数式（A-1）と（A-2）から決まる。

$$\frac{\gamma_y}{\beta_y}=\frac{\ell e_t^{sy}}{1-\ell e_t^{sy}} \quad \text{and} \quad \frac{\gamma_o}{\beta_o}=\frac{\ell e_t^{so}}{1-\ell e_t^{so}} \tag{A-10}$$

$\alpha_y, \beta_y, \alpha_o, \beta_o$ は効用関数のパラメータであるので、$\ell e_t^{sy}(1+n)=\ell e_{t-1}^{so}$ ，という均衡条件は滅多に成立しない。

３．共に過ごす余暇市場における支払い・受け取りの均衡

（A-1）式を次のように書ける。

$$\left[\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e_t^{sy}-\gamma_y\right]a_t^y=\alpha_y w_t\left(1-\ell e_t^{sy}\right)\ell e_t^{sy} \tag{A-11}$$

（A-8)式を利用して、若年世代が老年世代と共に過ごすための受け取り（支払い）は次のように書ける。

$$w_t\ell e_t^{sy}=\left(u^y+\mu\right)\frac{\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e_t^{sy}-\gamma_y}{\alpha_y+\gamma_y-\left(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y\right)\ell e_t^{sy}} \tag{A-12}$$

上の式と(A-1)式を使うと、若年期の消費は次のように書ける。

$$a_t^y=\left(u^y+\mu\right)\frac{\alpha_y\left(1-\ell e_t^{sy}\right)}{\alpha_y+\gamma_y-\left(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y\right)\ell e_t^{sy}} \tag{A-13}$$

$u^y+\mu>0$ であるので、消費になるための条件は $\alpha_y+\gamma_y-\left(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y\right)\ell e_t^{sy}>0$ である。

さらに、 $w_t\geq 0 \Leftrightarrow \left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e_t^{sy}-\gamma_y\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma_y}{\beta_y+\gamma_y}=\ell e_t^{sy}\Big|_{w_t=0}\leq \ell e_t^{sy}$

他方、(A-2)と(A-3)と(A-7)式から、t +1 の時に老年になった世代が共に余暇時間を過ごせるための支払い、（受け取り） は、次のように書ける。

$$w_{t+1}\ell e_t^{so}=\left(u^o-\varepsilon\right)\frac{\gamma_o-\left(\beta_o+\gamma_o\right)\ell e_t^{so}}{\alpha_o+\gamma_o-\left(\beta_o+\gamma_o+\alpha_o\right)\ell e_t^{so}} \tag{A-14}$$

老年世代の消費は次のように書ける。

$$a_t^o = (u^o - \varepsilon)\frac{\alpha_o(1-\ell e_t^{so})}{\alpha_o+\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o+\alpha_o)\ell e_t^{so}} \tag{A-15}$$

$u^o-\varepsilon$ と定義されたので $a_t^o>0 \Leftrightarrow \alpha_o+\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o+\alpha_o)\ell e_t^{so}>0$.

$1+n$ をかけて、一期前に（A-14）式をシフトして、（A-12）式に等しくさせたら、共に過ごす余暇時間の市場の均衡条件、あるいは $t+1$ の時の支払いと受け取りの均衡条件 $w_{t+1}\ell e_{t+1}^{sy}(1+n)=w_{t+1}\ell e_t^{so}$になる。

$$(u^y+\mu)\frac{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}{(\alpha_y+\gamma_y)(1+n)-(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y)\ell e_t^{so}} = \frac{(u^o-\varepsilon)}{1+n}\frac{\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o)\ell e_t^{so}}{\alpha_o+\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o+\alpha_o)\ell e_t^{so}} \tag{A-16}$$

$f_1(\ell e_t^{so})$ は若年世代余暇対する対価の受け取り（支払い）と、$f_2(\ell e_t^{so})$ は老年世代が授受する共有する余暇対する対価支払い（受け取り）と定義される。均衡は、$f_1(\ell e_t^{so})=f_2(\ell e_t^{so})$ になるところで成立する。ここでは、

$$f_1(\ell e_t^{so}) \equiv (u^y+\mu)(1+n)\frac{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}{(\alpha_y+\gamma_y)(1+n)-(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y)\ell e_t^{so}} \tag{A-17}$$

$$f_2(\ell e_t^{so}) \equiv (u^o-\varepsilon)\frac{\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o)\ell e_t^{so}}{\alpha_o+\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o+\alpha_o)\ell e_t^{so}} \tag{A-18}$$

である。

4．$f_1(\ell e_t^{so})$ 曲線の特徴

$$f_1(0) = -(u^y+\mu)(1+n)\frac{\gamma_y}{(\alpha_y+\gamma_y)} \tag{A-19}$$

消費が正である条件によって、共有余暇が存在する空間は

$\ell e_t^{so} < \ell e_t^{so}\big|_{f_1-sing}(1+n)$で、$f_1$ の特異点の左である。

$$\frac{\gamma_y+\alpha_y}{\beta_y+\gamma_y+\alpha_y}(1+n) = \ell e_t^{so}\Big|_{f_1-sing} \tag{A-20}$$

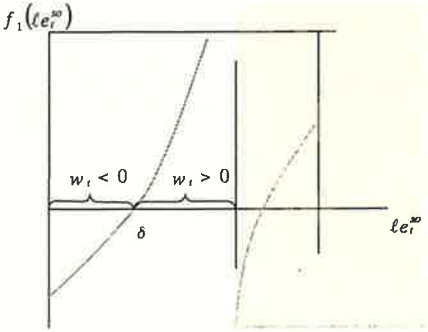
さらに、$f_1(\ell e_t^{so}) = 0 \Leftrightarrow \quad \ell e_t^{so}\Big|_{f_1-zero} \equiv \delta = \dfrac{\gamma_y(1+n)}{\beta_y+\gamma_y}$ 　(A-21)

$f_1(\ell e_t^{so})$ の導関数は次のである。

$$f_1'(\ell e_t^{so}) = \frac{\alpha_y\beta_y}{u^y+\mu}\left[\frac{f_1}{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}\right]^2 > 0 \tag{A-22}$$

$$f_1'(\ell e_t^{so}) = \alpha_y\beta_y(u^y+\mu)\left[\frac{1+n}{(\alpha_y+\gamma_y)(1+n)-(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y)\ell e_t^{so}}\right]^2 > 0,\quad f_1''(\ell e_t^{so}) > 0$$

$f_1(\ell e_t^{so})$ 曲線は次のように書ける。



$w_{t+1} \geq 0 \Leftrightarrow \delta \leq \ell e_t^{sy}$ 　(A-23)

陰のある面積ではℓe_t^{so}は定義されていない。

政府が若年世代への所得移転政策を推進（$\mu>0$ を増加させる）すると、f_1 曲線は横軸（余暇の共有時間）との交点、δ を中心に反時計周りに回転移動する。

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu}=(1+n)\frac{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}{(\alpha_y+\gamma_y)(1+n)-(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y)\ell e_t^{so}}$$

5．$f_2(\ell e_t^{so})$ 曲線の特徴

f_2 の下限は$f_2(0)=(u^o-\varepsilon)\dfrac{\gamma_o}{\alpha_o+\gamma_o}$ である。

消費が正である条件によって、共有余暇が存在する空間は $\ell e_t^{so}\Big|_{f_2-sing}>\ell e_t^{so}$ で、f_2 の特異点の左である。

さらに、$f_2(\ell e_t^{so})=0 \Leftrightarrow \ell e_t^{so}\Big|_{f_2-zero}\equiv\gamma=\dfrac{\gamma_o}{\beta_o+\gamma_o}$ (A-24)

$\beta_o,\alpha_o,\gamma_o>0$ であれば、$\ell e_t^{so}\Big|_{f_2-sing}\geq\gamma$ になる。なぜならば、$\dfrac{\alpha_o+\gamma_o}{\beta_o+\alpha_o+\gamma_o}\geq\dfrac{\gamma_o}{\beta_o+\gamma_o}$ であるからである。

f_2 では、

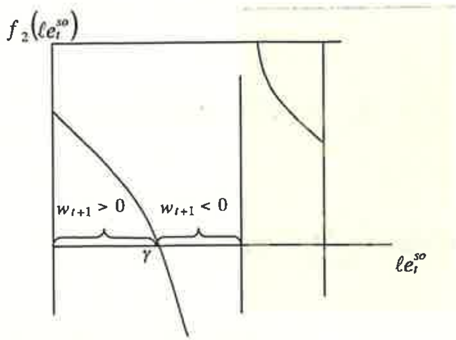
$$w_{t+1}\geq 0\Leftrightarrow\gamma\geq\ell e_t^{so} \tag{A-25}$$

が成立する。

$f_2(\ell e_t^{so})$ の導関数は次のである。

$$f_2'\left(\ell e_t^{so}\right) = -\frac{\alpha_o \beta_o}{u^o - \varepsilon}\left[\frac{f_2}{\gamma_o - (\beta_o + \gamma_o)\ell e_t^{so}}\right]^2 \tag{A-26}$$

$$f_2'\left(\ell e_t^{so}\right) = -\alpha_o \beta_o \left(u^o - \varepsilon\right)\left[\frac{1}{\alpha_o + \gamma_o - (\beta_o + \gamma_o + \alpha_o)\ell e_t^{so}}\right]^2, \quad f_2''\left(\ell e_t^{so}\right) < 0.$$



政府が若年世代への所得移転政策を推進（$\mu>0$ を増加させる）すると、f_2曲線は横軸（余暇の共有時間）との交点、γ を中心に反時計周りに回転移動する。

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mu} = -(1+n)\frac{\gamma_o - (\beta_o + \gamma_o)\ell e_t^{so}}{\alpha_o + \gamma_o - (\beta_o + \gamma_o + \alpha_o)\ell e_t^{so}}$$

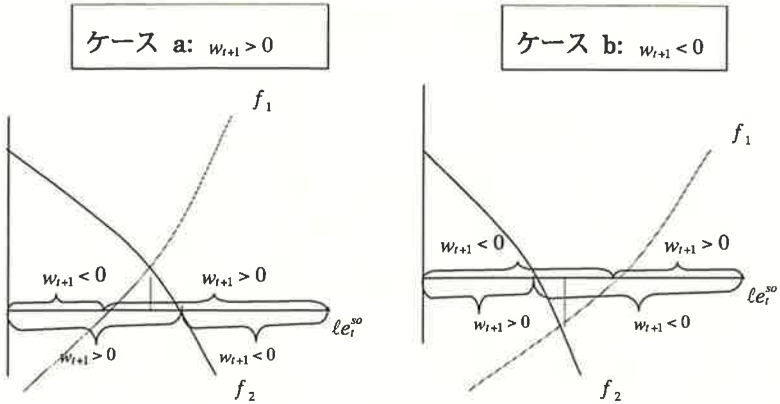
6．均衡点

6.1. 均衡

$f_1\left(\ell e_t^{so}\right)$曲線と $f_2\left(\ell e_t^{so}\right)$ 曲線を同じグラフで描くと、均衡点の特徴を観測できる。存在空間は次のである。

$$0 < \ell e_t^{so} < \min\left(\ell e_t^{so}\Big|_{f_1-sing}, \ell e_t^{so}\Big|_{f_2-sing} \right) \tag{A-27}$$

２つのケースがあり、ケース a には、均衡では $w_{t+1} > 0$ で、ケース b には $w_{t+1} < 0$ である。



ケース a と ケース b は と $\ell e_t^{so}\big|_{f_1-zero}$ の $\ell e_t^{so}\big|_{f_2-zero}$ 大きさから分かる。

$\ell e_t^{so}\Big|_{f_1-zero} < \ell e_t^{so}\Big|_{f_2-zero}$、均衡では $w_{t+1} > 0$ になる。逆の場合、逆になる。

$$w_{t+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma_o}{\beta_o + \gamma_o} \le \frac{\gamma_y (1+n)}{\beta_y + \gamma_y} \tag{A-28}$$

上の条件から消費財賦与に依存しないことが分かる。

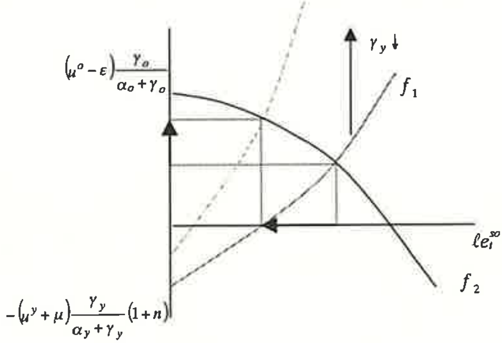
6.2. $w_{t+1} > 0$ の時の均衡

他世代と共に過ごす余暇時間に対する対価額あるいはその費用が高いというのは共に過ごす時間が多いというよりも、対価率が高いことからなることもある。これは、例えば、若年世代が老年世代と時間を過ごすことがそれほど享受しない（パラメータ γ_yが低い）場合に起こる。

$$\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_y} = -\left(u^y + \mu\right)\left(1+n\right)\alpha_y\left[\frac{(1+n)-\ell e_t^{so}}{\left(\alpha_y+\gamma_y\right)(1+n)-\left(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y\right)\ell e_t^{so}}\right]^2 < 0$$

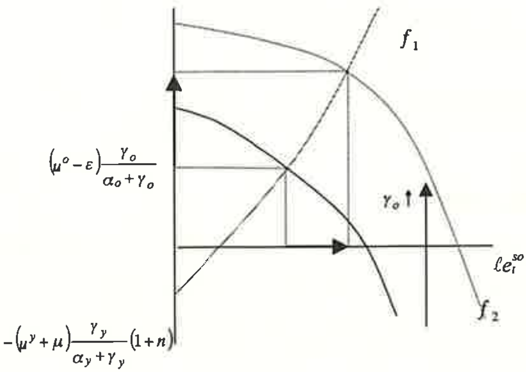
から分かるようにγ$_y$ は低いほど共に過ごす余暇時間量が低くて対価率は高い。

$w_{t+1} > 0$ **a high** w_{t+1} **with low** ℓe_t^{so}



他方、γ_o が高い時、f_1 曲線は上右の方を通過するので、共に過ごす時間量も滝か率も高いことが起こる。これは、次のグラフで表される.

$w_{t+1} > 0$: **high** w_{t+1} **and** ℓe_t^{so}



対価費用が高いもう一つの可能な場合は共に過ごす余暇時間が高くて対価率が

低いと言うことである．これは、γ_y も γ_o も高くて、$\frac{\gamma_o}{\beta_o+\gamma_o}-\frac{\gamma_y(1+n)}{\beta_y+\gamma_y}>0$ が低い場合である。

7．若年世代への所得移転政策の効果

7.1. 共に過ごす余暇時間への影響

政府が若年世代への所得移転政策を推進（$\mu>0$ を増加させる）すると、数学付録第4・5節で証明されるように、f_1 と f_2 曲線は横軸（余暇の共有時間）との交点を中心に反時計周りに回転移動する。

$w_{t+1}\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}<0$ である。ケース a ：$w_{t+1}>0$ and $\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}<0$ 、そして、ケース b

$w_{t+1}<0$ and $\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}>0$

7.2. $\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}$

陰関数の定理を適用して、$\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}$ を求められる。

$F\left(\ell e_t^{so},\mu\right)=0$ where $F\left(\ell e_t^{so},\mu\right)\equiv f_1\left(\ell e_t^{so}\right)-f_2\left(\ell e_t^{so}\right)$.

$$\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}=-\frac{F_\mu}{F_{\ell e_t^{so}}} \tag{A-29}$$

ただし、

$$F_{\mu}=f_{1}\left(_{\mu=0}\left(\frac{1}{u^{y}}+\frac{1+n}{u^{o}}\right)\right),\ \text{and}$$

$$F_{\ell e_t^{so}}\Big|_{\mu=0}=[f_1]^2\left\{\frac{(1+n)}{u^y}\alpha_y\beta_y\left[\frac{1}{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}\right]^2+\frac{1}{u^o}\alpha_o\beta_o\left[\frac{1}{\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o)\ell e_t^{so}}\right]^2\right\} \tag{A-30}$$

移転パラメーター＝ゼロに評価される。

$$\left.\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}\right|_{\mu=0}=-\frac{1}{f_1}\frac{\frac{1}{u^y}+\frac{1+n}{u^o}}{\frac{\alpha_y\beta_y}{u^y}\left[\frac{1}{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}\right]^2+\frac{\alpha_o\beta_o}{u^o}\left[\frac{1}{\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o)\ell e_t^{so}}\right]^2}$$

$$\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}<0\Leftrightarrow f_1>0$$

7.3. 対価レートへの影響

(22)式から、共に過ごす余暇時間の対価レートは

$$w_{t+1}=\frac{1}{\ell e_t^{so}}(u^o-\varepsilon)\frac{\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o)\ell e_t^{so}}{\alpha_o+\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o+\alpha_o)\ell e_t^{so}} \tag{A-31}$$

である。$\frac{dw_{t+1}}{d\mu}$ は次のようになる。

$$\frac{dw_{t+1}}{d\mu}=-\left(\left(\frac{w_{t+1}}{u^o-\varepsilon}+\frac{u^o-\varepsilon}{\ell e_t^{so}}\right)\left(\frac{1}{u^y}+\frac{1+n}{u^o}\right)\frac{(\beta_o+\gamma_o+\alpha_o)\frac{w_{t+1}\ell e_t^{so}}{u^o-\varepsilon}-\gamma_o}{S}\right) \tag{A-32}$$

ここでは、$S=\frac{\alpha_y\beta_y}{u^y}u^o\left[\frac{1}{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}\right]^2+\alpha_o\beta_o\frac{1}{\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o)\ell e_t^{so}}$

$w_{t+1}>0$のとき、S >0 ので、$\frac{w_{t+1}\ell e_t^{so}}{u^o-\varepsilon}$ は十分に大きければ$\frac{dw_{t+1}}{d\mu}<0$、その

絶対値も大きい。

7.4. 家計の効用への効果

若年世代への所得移転政策の家計の効用への効果を分析するために、間接効用関数の移転パラメータで微分して、$\dfrac{dW_t}{d\mu}$ ，$\mu=0$ という値で評価する。これは、政策が行わない状態から、移転が任意の低い水準に設定されるというケースである。

a. 1以降の世代

より詳細な計算が要求されれば、提供できるが、個々では、その結果だけまとめる。$\dfrac{dW_t}{d\mu}$ は次のように書ける。

$$\frac{dW_t}{d\mu}=\left(\frac{da^y}{d\mu}-w_t\frac{d\ell e^{sy}}{d\mu}\right)\left(\frac{R}{1+n}-1\right)\alpha_o\frac{(1+n)}{a^o}\ \text{for}\ t=1,\ 2\cdots\infty \tag{A-33}$$

記号の扱い方を簡単化するために、混乱にならない場合、期間を表す添え字をこれから無視される。

1世代以降に対して $\dfrac{dW_t}{d\mu}$ は同じである。

b. 初世代

初世代は老年世代であり、$\dfrac{dW_0}{d\mu}$ は（40）と異なる。

$$\frac{dW_0}{d\mu}=\frac{\alpha_o}{a_0^o}\left(\frac{da_0^o}{d\mu}+w_1\frac{d\ell e_0^{so}}{d\mu}\right) \tag{A-34}$$

$w\dfrac{d\ell e^{sy}}{d\mu}<0$ であるので、上の式から直ぐ分かるように、諸世代の効用が増加する必要条件は消費水準が上がるということである。政策の効果として初世代

の効用水準が上がるとしたら、対価の支払い総額、　$w_{t+1}\ell e_t^{so}$ が減ることは分かる。なぜならば、(A-7)に従って、税金支払い後消費を増加させるために、対価の支払い総額が減るべきである。

期間を表す添え字を無視すると、

$$\frac{dW_0}{d\mu}=\frac{\alpha_o}{a^o}\left(\frac{da^o}{d\mu}+w\frac{d\ell e^{so}}{d\mu}\right) \tag{A-35}$$

になる。

上の式を次のように書ける。

$$\frac{dW_0}{d\mu}=\frac{\alpha_o}{a^o}(1+n)\left(-\frac{da^y}{d\mu}+w\frac{d\ell e^{sy}}{d\mu}\right) \tag{A-36}$$

c. バレート改善政策

均衡では、$\frac{dW_t}{d\mu}$ を $\frac{dW_0}{d\mu}$ の関数として表すことができる。

$$\frac{dW_t}{d\mu}=\frac{dW_0}{d\mu}\left(1-\frac{R}{1+n}\right) \text{ for } t=1,\ 2\cdots\infty \tag{A-37}$$

(A-37)式から、若年世代への所得移転がパレート改善出来る政策の必要と十分条件を導くことができる。これは次の通りである.

$$\frac{dW_0}{d\mu}>0 \quad \text{and } R<1+n \tag{A-38}$$

必要・十分条件をパラメータの関数として表すことは非常に難しい。その代わり十分条件だけ求める。老年世代への所得移転について付録の最後の節にまとまる。

まず、(A-38) の条件をそれぞれを分析して、その後に同時に成立する条件を分析する。

c.1. $\frac{dW_0}{d\mu}>0$ 条件

次の関係を利用して、

$$\frac{da_t^y}{d\mu}=\frac{a^y}{u^y}\frac{1}{\alpha_y\left(1-\ell e^{sy}\right)}\left[\alpha_y\left(1-\ell e^{sy}\right)+\frac{\beta_y a^y}{1-\ell e^{sy}}\frac{d\ell e_t^{sy}}{d\mu}\right] \tag{A-39}$$

(A-36) に従って、$\frac{dW_0}{d\mu}>0$ ，は次のように書くことができる。

$$\frac{dW_0}{d\mu}>0 \Leftrightarrow \frac{a^y}{u^y}+(\mathrm{E}-1)w\frac{d\ell e_t^{sy}}{d\mu}<0 \tag{A-40}$$

ここでは、$\mathrm{E}\equiv\frac{a^y}{u^y}\frac{1}{1-\ell e^{sy}}\frac{\beta_y \ell e^{sy}}{\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e^{sy}-\gamma_y}$ (A-41)

$w\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}<0$ であるので、$\frac{dW_0}{d\mu}>0$ になるための必要条件は E －1＞0 である。

w ＞0 は若年世代への所得移転政策がパレート改善できる必要条件であり、w ＜0 は老年世代への所得移転政策がパレート改善できる十分条件であることを次に証明される。

(A-10) を利用して、(A-41) は次のようにかける。

$$\mathrm{E}\equiv\frac{\alpha_y}{\alpha_y+\gamma_y-\left(\beta_y+\gamma_y+\alpha_y\right)\ell e_t^{sy}}\frac{\beta_y \ell e_t^{sy}}{\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e_t^{sy}-\gamma_y} \tag{A-42}$$

w ＞0 の時に$\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e^{sy}-\gamma_y>0$ と E －1＞0 になる。なぜならば、

$\frac{\gamma_y+\alpha_y}{\beta_y+\gamma_y+\alpha_y}(1+n)=\ell e_t^{so}\Big|_{f_1-sing}$ f_1 の特異点であるので、 $\ell e_t^{so}\Big|_{f_1-sing}>\ell e_t^{so}$ にならなければならない。

逆に、w ＜0 の場合、 $\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e^{sy}-\gamma_y<0$ ，と E －1＜0 になる。

$w\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}<0$ であるので、$(E-1)w\frac{d\ell e_t^{so}}{d\mu}>0$ が成立する。$w<0$ の時に、

$\frac{dW_0}{d\mu}<0$ 。

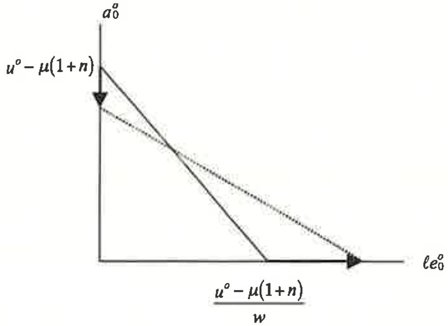
$\frac{dW_0}{d\mu}>0$ の必要条件

つまり、$w<0$ と $R<1+n$ が成立すれば、老年世代への所得移転政策がパレット改善できるということは分かる．若年世代への所得移転のパレート改善できる政策が存在すれば、$w>0$ のときになる。

若年世代への所得移転政策によって初世代の効用水準が増加する必要条件は $w>0$ だけではなく対価率が減少する、$\frac{dw}{d\mu}<0$ こともある。ここでは、グラフアプローチを利用して証明する。

初世代の家計の予算制約は $a^{o}=u^{o}-\mu(1+n)-w\ell e^{so}$ である。縦軸と横軸の切片は $u^{o}-\mu(1+n)$ と $\frac{u^{o}-\mu(1+n)}{w}$ である。対価率が正 $w>0$ である場合、予算制約のグラフは以下の図のようになる。

若年世代への移転政策によって老年世代が良くなるとしたら、予算制約集合がある範囲で拡大するべきである。μ が増加すると、縦軸の切片が低くなる。横軸の切片が大きくなるか小さくなるか。u^{o} は外生変数であるので、変化しない。所得移転によって、$\frac{u^{o}-\mu(1+n)}{w}$ の分子が減るので、対価率が十分に減ったら、横軸の切片が落ちる可能性がある。



$\frac{dW_0}{d\mu}>0$の十分条件

次に、パラメータに関するいくつかの条件の下で、$\frac{dW_0}{d\mu}>0$おこる可能性があることを証明する。(A-12)と（A-13）と（A-30）を利用して、いくつかの数学計算して、(A-40）条件は次のように書ける。

$$1<hj \tag{A-43}$$

ここでは、

$$h=\frac{1+n}{\ell e_t^{sy}}\frac{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{sy}-\gamma_y}{\alpha_y\beta_y}\frac{\beta_y\ell e_t^{sy}-(1-\ell e_t^{sy})((\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{sy}-\gamma_y)+((\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{sy}-\gamma_y)^2}{(1-\ell e_t^{sy})} \tag{A-44}$$

$$j=\frac{1+\frac{u^y}{u^o}(1+n)}{1+\frac{u^y}{u^o}\frac{\alpha_o\beta_o}{\alpha_y\beta_y}\left[\frac{(\beta_y+\gamma_y)\ell e_t^{so}-\gamma_y(1+n)}{\gamma_o-(\beta_o+\gamma_o)\ell e_t^{so}}\right]^2} \tag{A-45}$$

$h\ \ j>1$ が成立する条件を求めるのは複雑であるので、より簡単、$h\geq1$ と

$j>1$が別々成立する条件を求める。

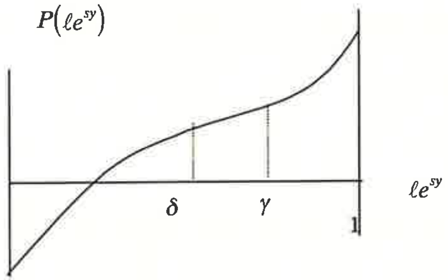
$h \geq 1$　条件

h の分子の $\beta_y \ell e_i^{sy} - \left(1-\ell e_i^{sy}\right)\left(\beta_y \ell e_i^{sy} - \gamma_y\left(1-\ell e_i^{sy}\right)\right) > 0$ であるので、$h \geq 1$ は

$1 \leq \frac{1+n}{\beta_y \ell e_i^{sy}} \frac{\left(\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e_i^{sy} - \gamma_y\right)^3}{\left(1-\ell e_i^{sy}\right)}$ あるいは$P\left(\ell e_i^{sy}\right)>0$という下限の分析から簡単に分析できる。ここでは、$P\left(\ell e_i^{sy}\right)>0$　は次のとおりである。

$$P\left(\ell e_i^{sy}\right) = \left(\left(\beta_y+\gamma_y\right)\ell e_i^{sy}\right)^3 - \left(3\gamma_y\left(\beta_y+\gamma_y\right)^2 - \frac{\beta_y}{(1+n)}\right)\left(\ell e_i^{sy}\right)^2 + \left[3\left(\gamma_y\right)^2\left(\beta_y+\gamma_y\right) - \frac{\beta_y}{(1+n)}\right]\ell e_i^{sy} - \left(\gamma_y\right)^3$$

上の数式が１つの実数の解しかない。



$P\left(\delta = \frac{\gamma_y(1+n)}{\beta_y+\gamma_y}\right)>0$ と $P\left(\gamma = \frac{\gamma_o}{\beta_o+\gamma_o}\right)>0$ と$\frac{\gamma_y(1+n)}{\beta_y+\gamma_y} < \frac{\gamma_o}{\beta_o+\gamma_o}$ を選んで、$h>1$ を満たさせる。

$j>1$ 条件

$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\alpha_o \beta_o}{\alpha_y \beta_y}\frac{1}{(1+n)}}$ と　$H \equiv \frac{\mathrm{A}\gamma_y(1+n)+\gamma_o}{\mathrm{A}\left(\beta_y+\gamma_y\right)+\beta_o+\gamma_o}$ を定義して、もし

$\ell e_t^{so} < H \Rightarrow j > 1$ になる。

H ＜γであるので、H は上限になる。$P\left(\ell e_t^{sy}\right)$ α_oに依存しないので、α_oの適当な値を選べば、$h \geq 1$という条件を影響しないで、j ＞1 を満たさせられる。α_oは低いほど、j ＞1 は成立しやすい。

c.2. R ＜ 1 ＋ n 条件

(m-3)と(m-7) と (m-8)を利用して、R <1＋ n は次のように書ける。

$$\frac{R}{1+n} < 1 \Leftrightarrow G < \ell e_t^{sy} \tag{A-46}$$

ここでは $G = \dfrac{\mathrm{M}\left(\alpha_y + \gamma_y\right) + \gamma_y}{\beta_y + \gamma_y + \mathrm{M}\left(\beta_y + \gamma_y + \alpha_y\right)}$ と $\mathrm{M} = \dfrac{\dfrac{\alpha_y u^o}{\alpha_o u^y} - 1}{\dfrac{\alpha_y}{\alpha_o}(1+n) + 1}$

証明できるが、

$$\frac{\gamma_y}{\beta_y + \gamma_y} < \frac{\gamma_y}{\beta_y + \gamma_y}(1+n) < G(\mathrm{M}) < \frac{\alpha_y + \gamma_y}{\beta_y + \gamma_y + \alpha_y} < (1+n)\frac{\alpha_y + \gamma_y}{\beta_y + \gamma_y + \alpha_y} \tag{A-47}$$

つまり、G (M) は存在空間に落ち、f_1 がゼロになる点よりも高くて、その特異店よりも低い。j ＞1 と$h \geq 1$が成立するための条件が $\dfrac{u^o}{u^y}$ に依存しないため、(53)は適当な$\dfrac{u^o}{u^y}$ を選んで、みたさせられる。

さらに、$\dfrac{\partial G}{\partial \mathrm{M}} > 0$ と $\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial \alpha_o} = \dfrac{\alpha_y}{\left[\alpha_o\right]^2} \dfrac{(1+n) - \dfrac{u^o}{u^y}}{\left[\dfrac{\alpha_y}{\alpha_o}(1+n) + 1\right]^2}$ であるので、$\dfrac{u^o}{u^y} < (1+n)$ であれば、α_o の値を低い場合 G も低い。

c.3. 若年世代への所得移転政策がパレート改善できる十分条件

つまり、パレート改善できる若年世代への移転政策であるための十分条件は次のように表される。

$$G < \ell e_t^{sy} < H \tag{A-48}$$

パラメータの適当な値を選べば、上の空間を作ることができる。例えば、

① まず、正の対価率になるように（$w_t > 0 \Leftrightarrow \delta < \gamma$）$\delta$ と γ を選ぶ。これは必要条件である。

② 次に、P（γ）>0 と P（δ）>0 が成立するように $\beta_y, \gamma_y, \beta_o, \gamma_o, n$ を選ぶ。

③ そして、$\ell e_t^{so} < H$ が成立するように α_o を選ぶ。

④ 最後に、$G < \ell e_t^{sy}$ を満たさせる $\dfrac{u^o}{u^y}$ を選ぶ。

老年世代への所得移転政策がパレート改善できる必要・十分条件

$$\frac{dW_0}{d\mu} < 0 \quad \text{and} \quad R < 1 + n \tag{A-49}$$

ここでは $\mu < 0$ は老年世代への所得移転を表す。

前に見たように　老年世代への所得移転政策によって初世代の効用水準を増加する条文条件である。（7. c 節）. 政策がパレー ト改善できるようにもうひとつの条件は利子率は人口成長率よりも低いということでる。(54)から $R < 1 + n$ を満たさせられる。