〈論　　　文〉

学習効果を考慮した不確実な選択肢に直面する組織の意思決定行動

藤　田　　　峻

個人と組織の意思決定における差異は、特に意思決定を行う主体の数が異なることから生じる。組織としての行動では、権限を持つ主体が全体の方向性を決定した下で、実働を担う主体がその方針にしたがった作業を行う。

こうした組織内での意思決定においては、しばしば情報の共有がなされない場合が観察される。たとえば、ある企業で上司が革新的なプロジェクトを思いついたとする。このとき、プロジェクトの実施を決めるのは上司だが、実際にこの仕事を進めるのは実働部門（部下）である。このとき実働部門は自身の私的情報を進んで上司に提供しうるだろうか[1]。現実には何らかの新しいプロジェクトを進めて現場の反応が消極的であるとき、それはプロジェクトの潜在能力が低いからなのか、現場にとっての負担が大きいからなのか明らかでない場合が見られる。

本稿ではこのような状況を念頭に置いた上で、新しいプロジェクトを実施する際には、実際にそのプロジェクトが稼働することを通じてプロジェクトの真価を学習しうることも考慮した、組織内の意思決定に関するモデルを設定する。結果として、各主体の利害関係が本源的に一致していたとしても、実働部門である部下の側について自らの私的情報を隠匿する可能性があることを示す。

1　従業員の能力や学習に関する情報を企業が知ることの重要性は、例えばBaker et al. (1994)で指摘されている。

本稿に関連する先行研究としては、まずItoh(2015)が挙げられる。Itoh(2015)では本稿と同様に、現状維持的なプロジェクトと新しいプロジェクトの存在を考える。しかし新規プロジェクトの開発を行うのは部下の役割であり、本稿で想定する上司側が提案するプロジェクトとは想定する対象が異なっている。このもとで現状維持または変革を求めるタイプの主体の組み合わせを考えて、いかなる主体をそれぞれの地位に充てることが望ましいか議論している。さらに関連する研究としては、組織内で異議を申し立てることができる場合について、これが組織の効率性に作用する影響を検討したLandier and Thesmar（2009）やMarino et al.(2009）も挙げられる。Gibbons and Murphy（1992）では、現状の不確実性に関連する懸念を持つ部下に対する最適な契約が検討されている[2]。組織内での情報伝達に関連する文献としては、Crawford and Sobel(1982)、Dessein(2002)、Dur and Swank(2005)などがあり、情報伝達が実現するためには、組織内の利害関係が一致することが重要であると指摘されている。

また、権限に非対称性が存在する場合の意思決定を扱った研究としてはAghion and Tirole(1997)が代表的である。彼らは意思決定を行う正式な権限と、実際的な影響を与えることができる実質的権限という２種類の権限を想定して、事前の意味で均質なプロジェクトの中からどのプロジェクトを実行するのかを選択する状況で、どのような権限の配分が望ましいかを議論している[3]。これらの研究は組織という環境の中での最適な制度設計を検討するものである。本稿はこのような直接的な制度設計に関わる検討ではなく、部下の行動に着目してより詳細な分析を行うことを志向している。

本稿のモデル設定に関する特徴として、実際にプロジェクトを稼働させた結果からそのプロジェクトの真価を学習しうる、という学習効果の存在がある。このような学習効果はMacRae(1972)やPrescott(1972)などをはじめとして、経済学の様々な分野でモデルに組み込まれている。たとえば地球温暖化に関する

2　これらのさらなる基礎的な研究として位置づけられる文献として、Mirrless（1976）なども挙げられる。

3　この文献をもとにしたサーベイ論文としてAghion et al. (2013)がある。この文献では理論的な研究を概観するだけでなく、現実の現象についても実証的に論じている。さらにAghion et al. (2002, 2004)などで理論的な拡張も行われている。

議論ではWijnbergen and Willems(2015)では学習効果を考慮した分析が行われており、学習効果の存在を考慮すれば、地球温暖化の原因に不確実性があると考える主体の方が、原因が人間の経済活動にあると確信する主体より多くの削減を行おうとする誘因を持つことが示されている[4]。他にもRothschild(1974)やAghion et al.(1991)のような独占的な供給者の需要に関する学習を行う場合などにも応用されている。本稿でも用いる学習効果をモデルに組み込むにあたっては、結果について誤差が生じることを仮定する必要があるが、本稿では誤差が一様分布にしたがうと仮定している。これはWijnbergen and Willems(2015)などでも仮定されており、Wijnbergen and Willems(2015)でも述べられている通り、計算量の都合による仮定である。より多くの分布を許容して学習効果をモデルに組み込んだ文献としては、通貨当局が金融政策を実施するにあたって不確実性を解消するための学習のためにコストを支払うことが最適である場合の存在を指摘したBertocchi and Spagat(1993)がある。

このような学習効果を考慮した組織内の意思決定を考察するため、まずは1期間モデルを設定して基本モデルを示す。このとき上司と部下に情報の非対称性が存在しない場合には、互いの利害が一致するように利得を設定する。すなわち、上司があるプロジェクトを好むとき、部下もそのプロジェクトを好むような状況を考える。この設定に基づいて、学習が発生しうる2期間モデルの分析を行う。このとき部下が上司に自分のタイプを伝えるような分離戦略を選択するような均衡と、部下が一部のタイプで自分の情報を隠すような均衡を考える。特に2点目の均衡の存在によって、上司と部下の利害が一致する場合にも、部下が上司に対して情報を明かさないような場合が存在する可能性を指摘する。

4　さらなる検討がWillems (2017)でもなされている。

1　１期間モデル

1.1　1 期間モデルの設定

まずは学習が発生しない１期間のモデルを考える。上司 b（Boss）と部下 s（Subordinate）からなる組織は、X 案と Y 案のどちらかを選択する状況に直面している。X 案は革新的な案であり、部下が選択する仕事量 w に対してどの程度の業績 r が実現するか未知である。業績は

$$r = xw + \varepsilon$$

によって決まり、x の値は x_h か x_l のどちらかである（$x_h > x_l$）。ε は誤差項であり $[-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ の一様分布にしたがう[5]。さらに上司にとっては X 案が部下に与える負荷も未知である。部下は仕事量 w に対して $c_X w$ だけのコストを感じる。上司は c_X が c_{Xh}, c_{Xl}（$c_{Xh} > c_{Xl}$）のどちらなのか知らない。他方、部下は自分のコストを正確に知っている。

一方 Y 案は現状維持的な案で、仕事量あたりの業績 y とコスト c_Y は、すべてのプレイヤーの共通知識である。ただし $x_h > y > x_l$，$c_{Xh} > c_Y > c_{Xl}$ である。

上司は X 案、Y 案のどちらを組織の方針として選択するか決定し、$d = 1$ ならば X 案、$d = 0$ ならば Y 案を選択することを表す。上司の利得 π_b は業績の多寡で定義され、次式である。

$$\pi_b = \{dx + (1-d)y\}w + \varepsilon$$

部下は上司の決定 d を観察してから自らの仕事量を選択し、部下の利得 π_s は業績・仕事のコストに依存して、次式の通り定義する。

$$\pi_s = \{dx + (1-d)y\}w + \varepsilon - \{dc_X + (1-d)c_Y\}w^2$$

第１項目は上司と共通で業績を表し、第２項目は逓増する仕事のコストを表している。以上をもとにゲームの手番を次のように設定する。

5　誤差 ε の存在は１期間モデルの分析では均衡に影響を与えないが、２期間モデルに拡張したとき学習に成功する確率に影響を与えるため、１期間モデルでも ε を含めた設定を行う。

1．自然がＸ案のポテンシャル（$x = x_h$ or x_l）を選択

- Ｘ案の業績が高い状況が選ばれる確率は $\alpha \in [0,1]$ である。
- 部下にとって Ｘ案の負荷が高い（$c_X = c_{Xh}$ である）確率は $\eta \in [0,1]$ である。しかしこの時点では部下にとっても c_X は未知である。

2．両プレイヤーの精度は共通で $1 > p > \frac{1}{2}$ である。

- シグナル $\gamma_b \in \{1, 0\}$（siGnal）によって、$p \in (\frac{1}{2}, 1)$ の精度で、上司にＸ案の生産性が伝わる（$\gamma_i = 1$ ならば $x = x_h$ であるというシグナルを表す）。
- プレイヤー i は、受け取った γ_i から x が x_h である信念を σ_i を持つ。

3．上司が方針決定として $d \in \{0, 1\}$ を選択。$d = 1$ ならばＸ案を選択し $d = 0$ ならばＹ案を選択

- 上司がＸ案を選択した場合、部下にシグナル γ_s とＸ案のコスト c_X の値が伝わる。

4．部下が作業量として $w \in \mathbb{R}_+$（workload）を選択

- 部下の選択した仕事量は上司にも観察可能である。

5．誤差項 ε を含む第１期目の業績が決まる。

各プレイヤーがシグナルを受け取った時点で $x = x_h$ と考える信念 σ_i は、γ_i について次式によって表すことができる。

$$\sigma_i = \gamma_i \frac{\alpha p}{\alpha p + (1-\alpha)(1-p)} + (1-\gamma_i) \frac{\alpha(1-p)}{\alpha(1-p) + (1-\alpha)p}$$

以上の下で 1 期間モデルの均衡を考える。

1.2　1 期間モデルの均衡

1.2.1　部下の意思決定

まずは上司の意思決定 d を観察した部下が仕事量を選択する手番を考える。上司が $d = 0$（Ｙ案）を選択した場合、仕事量 1 単位あたりの業績は y で一意である。よって $d = 0$ が選択されたもとで部下の利得を最大化する仕事量を次式の通り計算できる。

$$w_y^* = \frac{y}{2c_Y}$$

他方、上司が $d=1$ を選択した場合、部下は自分の信念 σ_s によって期待利得を最大化する仕事量 w を選択する。ただし σ_s は $d=1$ を受けてアップデートされている。このアップデートされた信念を σ_s^* とすると、部下は以下の最大化問題に直面する。

$$\max_{w} \mathbb{E}[\pi_s] = \mathbb{E}[\{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}w + \varepsilon - c_X w^2]$$
$$= \{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}w - c_X w^2$$

FOCより最適な w の水準は以下である[6]。

$$\{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\} - 2c_X w^* = 0 \iff w_x^* = \frac{\{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}}{2c_X}$$

1.3　上司の意思決定

上司は X,Y のどちらの案を選択するか決定する。このとき上司が $d=1$ を選択する（X 案を選ぶ）のは次の場合である。

$$q_{hh}^0 w_{hh}^* x_h + q_{hl}^0 w_{hl}^* x_h + q_{lh}^0 w_{lh}^* x_l + q_{ll}^0 w_{ll}^* x_l \geq w_y^* y$$

ただし q_{ij} は真実が $x=x_i,\ c_X=c_{Xj}$である確率を表す[7]。w_{ij}^* は真実が $x=x_i$, $c_X=c_{Xj}$のとき、部下が選択する仕事量 w の期待値である。ただし w^* は上司の意思決定を受けてアップデートされた部下の信念 σ_s^*に依存して決まることに注意する。このとき、各 w^*は次のように書くことができる[8]。

$$w_{hh}^* = Prob[\gamma_s = 1|_{x=x_h}]w^*(\sigma_s^*(\gamma_s=1), c_{Xh})$$
$$+ Prob[\gamma_s = 0|_{x=x_h}]w^*(\sigma_s^*(\gamma_s=0), c_{Xh})$$
$$= pw^*(\sigma_s^*(1), c_{Xh}) + (1-p)w^*(\sigma_s^*(0), c_{Xh})$$

上司は自らのシグナル γ_b ごとに d の値を選択できるが、「ある $\bar{\sigma}_b$ 以上ならば $d=1$ を選択する」という閾値戦略（３通り）を考える。

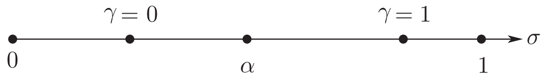
いま、各プレイヤーについて持ちうる σ は次図にある２通りである。ここで $\bar{\sigma}_b$ 以上ならば $d=1$ を選択するという閾値戦略を考えて、部下の信念がどのよ

6　このとき部下には自分が他のタイプであると偽る誘因は存在しない。しかし自分のタイプに対する上司の予想が部下の利得に含まれる場合(たとえば自分のコストが低いほど評判が高まってボーナスを得るなど）には、他のタイプと偽る誘因が生じる。

7　たとえば$q_{hl}=\sigma_b(1-\eta)$である。

8　以降では$\sigma_s^*(\gamma_s=1)$ を σ_s^*(１)と省略して表す。

うにアップデートされるか考える。そして、アップデートされた σ_s^* と設定した閾値戦略 $\bar{\sigma}_b$ が整合的かどうか調べる。



部下の立場で考えて、各閾値戦略のもとで $d = 1$ が実際に選ばれたとする。このとき部下の信念 σ_s のアップデートを考える。

ケース 1：$\sigma_b > \sigma_b$（$\gamma_b = 1$）の場合（常に $d = 0$ の場合）

このとき部下の信念は事前のままであると仮定する。γ_sというシグナルを受け取っている部下のアップデートされた信念 $\sigma_s^*(\gamma_s)$ は次の 2 通りである。

$$\sigma_s^*(1) = \frac{\alpha p}{\alpha p + (1-\alpha)(1-p)}$$
$$\sigma_s^*(0) = \frac{\alpha(1-p)}{\alpha(1-p) + (1-\alpha)p}$$

上司がこのケースの閾値戦略を選択するもとで X 案に逸脱する場合を考えると、部下は $w_x^* = \frac{\{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}}{2c_X}$ をアップデートされた（事前のままの）σ_s^* にしたがって選択する。これと q などの値を次式に代入すると、X 案を選択した場合の期待利得（業績の期待値）を表す式を計算できる。

$$q_{hh}^0 w_{hh}^* x_h + q_{hl}^0 w_{hl}^* x_h + q_{lh}^0 w_{lh}^* x_l + q_{ll}^0 w_{ll}^* x_l$$

ケース 2：$\sigma_b(1) > \bar{\sigma}_b > \sigma_b(0)$ の場合

このケースでは $d = 1$ を部下が観察すると、部下は上司が受け取ったシグナルは $\gamma_b = 1$ であったと知る。ケース 1 と同様に、γ_sというシグナルを受け取っている部下のアップデートされた信念 $\sigma_s^*(\gamma_s)$ は次の 2 通りである。

$$\sigma_s^*(1) = \frac{\alpha p^2}{\alpha p^2 + (1-\alpha)(1-p)^2}$$
$$\sigma_s^*(0) = \frac{\alpha(1-p)p}{\alpha(1-p)p + (1-\alpha)p(1-p)} = \alpha$$

以降はケース 1 と全く同様の方法で、ケース 2 においてアップデートされ

る信念のもとで、X 案を選択した場合に上司が得る期待利得を計算できる。

ケース3：いかなる場合でも $d=1$ を選ぶ場合

部下の信念は事前のままなので、信念のアップデートと期待利得はケース1と同じである。以上をもとに、任意のケースについて上司の逸脱条件を考える。上司の期待利得は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_b] &= q^0_{hh}w^*_{hh}x_h + q^0_{hl}w^*_{hl}x_h + q^0_{lh}w^*_{lh}x_l + q^0_{ll}w^*_{ll}x_l \\ &= \sigma_b\eta w^*_{hh}x_h + \sigma_b(1-\eta)w^*_{hl}x_h + (1-\sigma_b)\eta w^*_{lh}x_l + (1-\sigma_b)(1-\eta)w^*_{ll}x_l \\ &= \sigma_b x_h\{\eta w^*_{hh} + (1-\eta)w^*_{hl}\} + (1-\sigma_b)x_l\{\eta w^*_{lh} + (1-\eta)w^*_{ll}\} \\ &\equiv \sigma_b x_h A + (1-\sigma_b)x_l B \\ &= \sigma_b(x_h A - x_l B) + x_l B\end{aligned}$$

ここで次の補題が言える。

補題1. $\frac{\partial\mathbb{E}[\pi_b]}{\partial\sigma_b} = x_h A - x_l B > 0$ である。

証明. $x_h > x_l$ より $A > B$ であると言えれば十分である。$A > B$ であることを示すには $w^*_{hh} > w^*_{lh}$ かつ $w^*_{hl} > w^*_{ll}$ であることを示せばよい。w_{ij} を $\gamma_s=1$, $c_X=c_{Xj}$ である部下が上司の閾値戦略を所与とした下で選択する w とすると、

$$\begin{aligned}w^*_{hh} > w^*_{lh} &\iff pw_{1h} + (1-p)w_{0h} > (1-p)w_{1h} + pw_{0h} \\ &\iff (2p-1)(w_{1h} - w_{0h}) > 0\end{aligned}$$

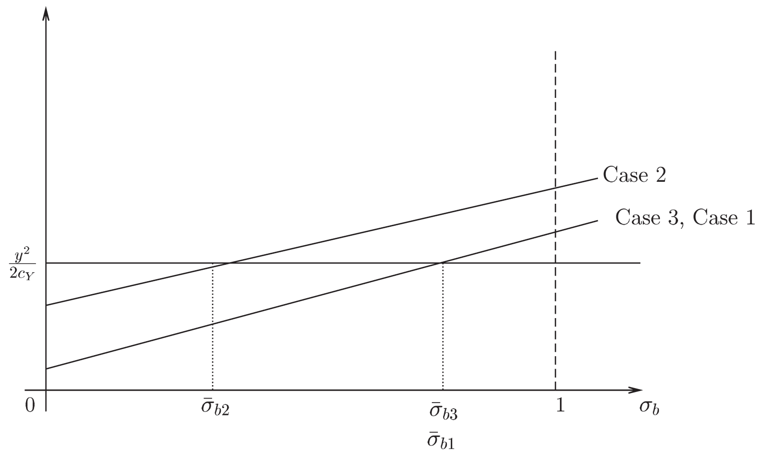
である[9]。ゆえに $\frac{\partial\mathbb{E}[\pi_b]}{\partial\sigma_b} > 0$ である。　Q.E.D.

次に各ケースの閾値を考える。ケースに応じて σ_s のアップデートが異なりうるが、X 案と Y 案を選択することが無差別になる σ_b の水準は、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_b|_{d=1}] = \mathbb{E}[\pi_b|_{d=0}] &\iff \sigma_b x_h\{\eta w^*_{hh} + (1-\eta)w^*_{hl}\} + (1-\sigma_b)x_l\{\eta w^*_{lh} + (1-\eta)w^*_{ll}\} = \frac{y^2}{2c_Y} \\ &\iff \sigma_b(x_h A - x_l B) + x_l B = \frac{y^2}{2c_Y} \\ &\iff \bar{\sigma}_b = \left(\frac{y^2}{2c_Y} - x_l B\right)\frac{1}{x_h A - x_l B}\end{aligned}$$

9　なぜなら $p>\frac{1}{2}$ であり、$\sigma^*_s(1) > \sigma^*_s(0)$ より $w_{1h} > w_{0h}$ だからである。

である。ここで $\mathbb{E}[\pi_b|_{d=1}]$ を表す直線を考えると $\sigma_b = 0$ のとき $x_l B$ が縦軸切片となり、この値はケース 2 が大きくケース1, 3 は等しい[10]。さらに $\sigma_b = 1$ を考えるときも、直線の高さは $x_h A$ なのでケース 2 が最も大きく、ケース1, 3 の値は等しい。ゆえに $\sigma_b \in [0, 1]$ においてケース 2 の直線が常にケース 1 の直線を上回る[11]。



ゆえに均衡では上図の閾値戦略を選択する条件を上司が満たすとき、部下は $w_x^* = \frac{\{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}}{2c_X}$, $w_y^* = \frac{y}{2c_Y}$ を選択して各ケースごとの信念を持つ。

2　2 期間モデルの設定

以上で検討した 1 期間モデルを 2 期間モデルに拡張する。この拡張で生じる最大の変化は、学習効果が発生することである。すなわち 1 期目に X 案が選

10　ケース1, 3 が等しくなるのは、ケース 1 では事前の信念のままと仮定しているので、ケース 3 でアップデートされる信念に一致するからである。

11　ただし $0 < \bar{\sigma}_{b2} < \sigma_b(0) < \bar{\sigma}_{b1} < \sigma_b(1) < 1$ のとき、考えているどのケースからも逸脱する誘因を持つ。

択されるとき、仕事量に対して実現する業績が十分に大きい（小さい）ならば、$x = x_h$（$x = x_l$）であると学習することができる[12]。

２期間モデルでは１期間モデルのゲームを２度繰り返す。よって各プレイヤーともに意思決定のタイミングが２回存在する。このとき２期間モデルのゲームの流れは次の通りである。

1．自然が、Xの方が業績が高い状況か、Yの方が業績が高い状況か（$x = x_h$ or x_l）を選択
   - X の業績が高い状況が選ばれる確率は $\alpha \in$［0,1］である。
   - 部下の X 案に関するコストが高い確率は $\eta \in$［0,1］である。しかしこの時点では部下にとっても c_X は未知である。

2．自然が精度(precision)p にしたがってシグナルγ_iを与える

- シグナル $\gamma_b \in \{1, 0\}$ (siGnal）によって、$p \in (\frac{1}{2}, 1)$ の精度で、上司に X 案の生産性が伝わる（ $\gamma_i = 1$ ならば「$x = x_h$ である」というシグナルを表す)。
   - プレイヤー i は，受け取った γ_i から x が x_h である信念を σ_i を持つ。

3．上司が１期目の方針として $d_1 \in \{0, 1\}$ を選択。$d_1 = 1$ ならば X 案を選択し $d_1 = 0$ ならば Y 案を選択
   - 上司が X 案を選択した場合、部下にシグナル γ_sと X 案のコストc_Xの値が伝わる。

4．部下が１ 期目の作業量として $w_1 \in \mathbb{R}_+$ (workload) を選択
   - 上司も部下の仕事量を観察可能である。

5．誤差項 ε_1を含む第１期目の業績が決まる
   - １期目に X 案が選択されており、かつ実現した業績から運よく学習に成功すれば、x の真の値が両プレイヤーにとって既知となる。

6．上司が第２期目の方針として $d_2 \in \{0, 1\}$ を選択。 $d_2 = 1$ ならば X 案を選択し $d_2 = 0$ ならば Y 案を選択
   - 上司がここで初めて X 案を選択した場合、部下にシグナルγ_sと X 案のコスト c_Xの値が伝わる。

12　しかし中途半端な業績が実現した場合には，誤差が一様分布にしたがうために学習効果はゼロである。

7．部下が２ 期目の作業量として $w_2 \in \mathbb{R}_+$ を選択
8．誤差項 ε_2 を含む第２期目の業績が決まる

3　２期間モデルの分析（分離の場合）

以上の設定のもとで、上司が１期目にＸ案を選択したときに部下が選択する仕事量 w_1 が、部下のタイプごとに異なる場合に限定して考える。さらに上司の１期目の選択も分離の場合に限定して考える。

3.1　学習した場合の２期目

まずは１期目の業績から真の x の値が判明した場合を考える。

3.1.1　学習した場合の w_2

部下にとって自分のコスト c_X と真実の x は、ともに既知である。ゆえに上司の２期目の選択 d_2 に応じて、Ｘ案のコストが c_X である部下の選択する仕事量は次式である。

$$w_{2X} = \frac{x}{2c_X}\ ,\ w_{2Y} = \frac{y}{2c_Y}$$

3.1.2　学習した場合の d_2

次に上司の選択を考える。学習に成功しているとき、上司も x の真の値を知っている。しかし $d_1 = 0$ を選択しているとき、部下のコストに関する情報が得られないことに注意する必要がある。

よって、１ 期目に $d_1 = 1$ を選択しているときには、分離均衡を考えているので部下のコストも知ることができる。このとき $d_2 = 1$ を選択する条件は次式である。

$$\frac{x^2}{2c_X} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$$

$d_1 = 0$ を選択しているとき、部下のコストに関する信念は事前のままで η の確率で $c_X = c_{Xh}$ と予想する。よって $d_2 = 1$ を選択する条件は次式である。

$$\eta \frac{x^2}{2c_{Xh}} + (1-\eta)\frac{x^2}{2c_{Xl}} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$$

3.2　学習しなかった場合の２期目

3.2.1　学習しなかった場合の w_2

もし上司が２期目にＹ案を選択する（ $d_2 = 0$ ）ならば、部下の２期目の仕事量は $\frac{y}{2c_Y}$ である。

他方、上司が２期目にX案を選択する（ $d_2 = 1$ ）ならば、部下が意思決定を行う段階で持ちうる信念は次の３通りで、シグナル γ_s に応じて次の通りである。ただし表記の簡略化のため、次の通り記号を定義する。

$$\sigma_{11} \equiv \frac{\alpha p^2}{\alpha p^2 + (1-\alpha)(1-p)^2}\ ,\ \sigma_1 \equiv \frac{\alpha p}{\alpha p + (1-\alpha)(1-p)}\ ,\ \sigma_{10} = \sigma_{01} \equiv \alpha\ ,$$
$$\sigma_0 \equiv \frac{\alpha(1-p)}{\alpha(1-p) + (1-\alpha)p}\ ,\ \sigma_{00} \equiv \frac{\alpha(1-p)^2}{\alpha(1-p)^2 + (1-\alpha)p^2}$$

１．$\gamma_b = 1$ と判明してアップデートされた信念

$$\sigma_s^{**}(\gamma_s = 1) = \sigma_{11}\ ,\ \sigma_s^{**}(\gamma_s = 0) = \sigma_{10}$$

２．γ_b が分からず、事前の信念

$$\sigma_s^{**}(\gamma_s = 1) = \sigma_1\ ,\ \sigma_s^{**}(\gamma_s = 0) = \sigma_0$$

３．$\gamma_b = 0$ と判明してアップデートされた信念

$$\sigma_s^{**}(\gamma_s = 1) = \sigma_{01}\ ,\ \sigma_s^{**}(\gamma_s = 0) = \sigma_{00}$$

これらのアップデートされた信念のもとで、$d_2 = 1$ ならば次の仕事量を選択する。

$$w_{2X} = \frac{\{\sigma_s^{**} x_h + (1-\sigma_s^{**}) x_l\}}{2c_X}$$

ここで σ_s^{**} の大小関係は次の通りである。

$$\sigma_{11} > \sigma_1 > \sigma_{10} = \sigma_{01} > \sigma_0 > \sigma_{00}$$

3.2.2　学習しなかった場合の d_2（$d_1 = 1$ の場合）

まずは $d_1 = 1$ であった場合の上司の選択を考える。分離均衡を考えているので，$d_1 = 1$ を選択すれば上司は部下のタイプを完全に知ることができる。つまり c_X も γ_s も、上司は d_2 を決定する時点で知っている。γ_s を観察してアップデートされた上司の信念を σ_b^* とする。このとき次式を満たすならば $d_2 = 1$ を選択する。

$$\{\sigma_b^* x_h + (1-\sigma_b^*)x_l\}w_{2X} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$$

ただし $w_{2\mathrm{X}}$ は前項の σ_s^{**} に依存して決まり、σ_s^{**} は d_1, d_2 によって決まる。σ_b としてありうるのは次の場合である。

1．$\gamma_b = 1$，$\gamma_s = 1$ のとき、

$$\sigma_b^* = \frac{\alpha p^2}{\alpha p^2 + (1-\alpha)(1-p)^2} = \sigma_{11}$$

2．$\gamma_b = 1$，$\gamma_s = 0$、または $\gamma_b = 0$，$\gamma_s = 1$ のとき、

$$\sigma_b^* = \alpha = \sigma_{10} = \sigma_{01}$$

3．$\gamma_b = 0$，$\gamma_s = 0$ のとき、

$$\sigma_b^* = \frac{\alpha(1-p)^2}{\alpha(1-p)^2 + (1-\alpha)p^2} = \sigma_{00}$$

ここで $d_2 = 1$ を選択した場合の期待利得 $\{\sigma_b^* x_h + (1-\sigma_b^*)x_l\}w_{2X}$ について、横軸に σ_b^* 縦軸に（2期目からの）期待利得をとった図を考えると、まず右上がりの形状を持つと言える。さらに σ_s^{**} が大きいほど $w_{2\mathrm{X}}$ が大きくなるので、この直線は σ_s^{**} が大きいほど上側に現れると言える。

以上をもとに、2期目の上司の利得を列挙する。このとき上司は部下のタイプを完全に把握しているので $c_X = c_{Xj}$ であることを知っていることに注意する。さらに部下の受け取ったシグナル γ_s も既知なので、各場合ごとの部下の仕事量と上司が2期目から得る期待利得 r_2 は次のように整理できる。

- ケースA：1期目上司が分離で $\gamma_b = 1$ と判明したとき

$$\gamma_s = 1 \Longrightarrow w_{2X} = \frac{\sigma_{11}x_h + (1-\sigma_{11})x_l}{2c_{Xj}}\ ,\ r_2 = \frac{\{\sigma_{11}x_h + (1-\sigma_{11})x_l\}^2}{2c_{Xj}}$$
$$\gamma_s = 0 \Longrightarrow w_{2X} = \frac{\sigma_{10}x_h + (1-\sigma_{10})x_l}{2c_{Xj}}\ ,\ r_2 = \frac{\{\sigma_{10}x_h + (1-\sigma_{10})x_l\}^2}{2c_{Xj}}$$

- ケースB１：１期目上司が一括で、２期目上司が分離（$d_2=1 \Longleftrightarrow \gamma_b=1$）の場合は、ケースAと同じである。
- ケースB２：１ 期目、２ 期目ともに上司が一括の場合

$$\gamma_b=1,\ \gamma_s=1 \Longrightarrow w_{2X}=\frac{\sigma_1 x_h+(1-\sigma_1)x_l}{2c_{Xj}}\ ,\ r_2=\{\sigma_{11}x_h+(1-\sigma_{11})x_l\}\frac{\{\sigma_1 x_h+(1-\sigma_1)x_l\}}{2c_{Xj}}$$
$$\gamma_b=1,\ \gamma_s=0 \Longrightarrow w_{2X}=\frac{\sigma_0 x_h+(1-\sigma_0)x_l}{2c_{Xj}}\ ,\ r_2=\{\sigma_{10}x_h+(1-\sigma_{10})x_l\}\frac{\{\sigma_0 x_h+(1-\sigma_0)x_l\}}{2c_{Xj}}$$
$$\gamma_b=0,\ \gamma_s=1 \Longrightarrow w_{2X}=\frac{\sigma_1 x_h+(1-\sigma_1)x_l}{2c_{Xj}}\ ,\ r_2=\{\sigma_{01}x_h+(1-\sigma_{01})x_l\}\frac{\{\sigma_1 x_h+(1-\sigma_1)x_l\}}{2c_{Xj}}$$
$$\gamma_b=0,\ \gamma_s=0 \Longrightarrow w_{2X}=\frac{\sigma_0 x_h+(1-\sigma_0)x_l}{2c_{Xj}}\ ,\ r_2=\{\sigma_{00}x_h+(1-\sigma_{00})x_l\}\frac{\{\sigma_0 x_h+(1-\sigma_0)x_l\}}{2c_{Xj}}$$

ケースB２において、上司は部下の $\gamma_s,\ c_X$ をともに知っているが、部下は上司の γ_b を知らないので σ_s^{**} は事前のままであることに注意する。

3.2.3　学習しなかった場合の d_2 （$d_1=0$ の場合）

$d_1=0$ のとき $w_1=\frac{y}{2c_Y}$ である。このとき、上司は部下のタイプについて何の情報も得られない。このケースでありうる状況は次の２通りである。

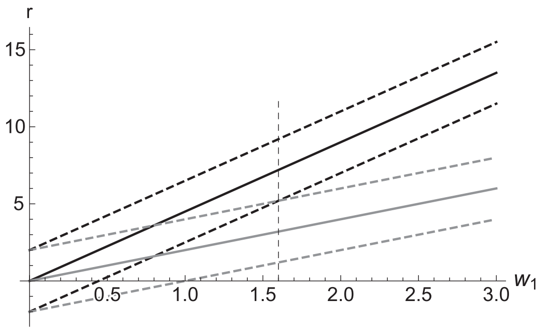
1. d_1 が一括戦略で、上司・部下ともに信念のアップデートが発生しない
   - 上司がどのタイプでも $d_1=0$ を選択しているならば、上司・部下ともに信念は初期値のままなので、１期間モデルと同様の行動を２期目に選択する。
2. $\gamma_b=0 \Longleftrightarrow d_1=0$ として d_1 が分離戦略で、部下だけ信念のアップデートが発生する
   - X案が２期目に選択されれば、部下はアップデートされた信念 $\sigma_s^{**}\in\left\{\alpha,\frac{\alpha(1-p)^2}{\alpha(1-p)^2+(1-\alpha)p^2}\right\}$ にしたがって w_2 を選択する。上司の信念 σ_b は事前のままで、次の条件を満たすときX案（$d_2=1$）を選択する。均衡経路外でもこの信念を持つと仮定する。ただし、

     $w_2(\sigma_{ij},c_{Xk})=\frac{\sigma_{ij}x_h+(1-\sigma_{ij})x_l}{2c_{Xh}}$ である。

$$\sigma_b\eta x_h\{pw_2(\sigma_{01},c_{Xh})+(1-p)w_2(\sigma_{00},c_{Xh})\}+\sigma_b(1-\eta)x_h\{pw_2(\sigma_{01},c_{Xl})+(1-p)w_2(\sigma_{00},c_{Xl})\}$$
$$+(1-\sigma_b)\eta x_l\{(1-p)w_2(\sigma_{01},c_{Xh})+pw_2(\sigma_{00},c_{Xh})\}+(1-\sigma_b)(1-\eta)x_l\{(1-p)w_2(\sigma_{01},c_{Xl})+$$
$$pw_2(\sigma_{00},c_{Xl})\}\geq\frac{y^2}{2c_Y}$$

3.3 学習効果

w_1と実現した1期目の業績r_1に依存して、両プレイヤーともに真実のxを学習できる可能性がある。



学習に成功する確率$L(w_1)$は以下である。

$$L(w_1) = \min\left\{\frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1\ ,\ 1\right\}$$

特に$x = x_h$と学習すると予想する確率$LH(w_1)$と$x = x_l$と学習すると予想する確率$LL(w_1)$は、各プレイヤーの1期目の意思決定時における信念をσ_iとすると次式のようになる[13]。

$$LH(w_1) = \sigma_i \frac{(x_h w_1 + \bar{\varepsilon}) - (x_l w_1 + \bar{\varepsilon})}{(x_h w_1 + \bar{\varepsilon}) - (x_h w_1 - \bar{\varepsilon})} = \sigma_i \frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}} w_1 \leq \sigma_i\ ,$$
$$LL(w_1) = (1-\sigma_i)\frac{(x_h w_1 - \bar{\varepsilon}) - (x_l w_1 - \bar{\varepsilon})}{(x_l w_1 + \bar{\varepsilon}) - (x_l w_1 - \bar{\varepsilon})} = (1-\sigma_i)\frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}} w_1 \leq 1 - \sigma_i$$

また、学習に失敗する確率は次式である。

$$NL(w_1) = 1 - \frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}} w_1 \geq 0$$

端点の条件（点線の垂線）は、$\bar{w}_1 = \frac{2\bar{\varepsilon}}{x_h - x_l}$である。

13　たとえば$LH(w_1)$は、図における点線の垂線より小さなw_1を考えるとき、$x = x_h$なら実現しうる業績は上濃点線から下濃点線の間である。しかし上淡点線と下濃点線の間の業績が実現すると、学習に失敗する。ゆえに$x = x_h$と学習する確率は、$x = x_h$である確率σ_iに$\frac{\text{上濃点線}-\text{上淡点線}}{\text{上濃点線}-\text{下濃点線}}$をかけた値である。

3.4　1期目部下の w_1 選択

$d_1=0$ のとき $w_1=\frac{y}{2c_Y}$ である。よって以下では $d_1=1$ の場合を考える。

学習の有無（x_h, x_l のどちらに学習するかも含む）ごとの2期目の選択を d_2^{LH} などで表すと、部下の期待利得は次式のように表すことができる。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_s] =& \{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}w_1 - c_X w_1^2 \\
&+ LH(w_1)\left[d_2^{LH}\left\{\frac{x_h^2}{2c_X} - c_X\left(\frac{x_h}{c_X}\right)^2\right\} + (1-d_2^{LH})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&+ LL(w_1)\left[d_2^{LL}\left\{\frac{x_l^2}{2c_X} - c_X\left(\frac{x_l}{c_X}\right)^2\right\} + (1-d_2^{LL})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&+ \{1-L(w_1)\}\left(d_2^{NL}\left[\{\sigma_s^{**}x_h + (1-\sigma_s^{**})x_l\}w_2^{NL} - c_X(w_2^{NL})^2\right] + (1-d_2^{NL})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{c_Y}\right)^2\right\}\right)
\end{aligned}
$$

1期目の上司が分離（$d_1=1 \Leftrightarrow \gamma_b=1$）の場合、部下が w_1 を選択する段階で、部下には上司・部下すべてのタイプに関する情報が完全に揃っているので、$d_2^{LH}, d_2^{LL}, d_2^{NL}$は、すべて所与のパラメータで確定する。ゆえに上式の2行目から4行目の乗算の右側は定数とみなすことができる。そこで1期目上司が分離で $d_1=1$ を選択した場合に部下が w_1 を選択するときの期待利得は、LH, LL, L を代入すると次式である。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_s] =& \{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}w_1 - c_X w_1^2 \\
&+ \sigma_s^*\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1\pi_{2s}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1\pi_{s2}^{LL} + \left(1-\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1\right)\pi_{s2}^{NL}
\end{aligned}
$$

FOC から、このとき部下が選択する w_1 は $\bar{\varepsilon}$ が十分に大きいとき次のように計算できる[14]。

$$
\frac{\partial \mathbb{E}[\pi_s]}{\partial w_1} = 0 \iff w_1^* = \frac{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X} + \frac{1}{2c_X}\left[\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL} - \pi_{s2}^{NL}\right]\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}
$$

ゆえに上司が分離のもとで $d_1=1$ を選択したとき、学習効果を通じた1期目の仕事量の増減は $\left[\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL} - \pi_{s2}^{NL}\right]$ の正負によって決まる。

ただし $\pi_{s2}^{LH}, \pi_{s2}^{LL}$ の $d_2^{LH}, d_2^{LL}=1$ となる条件は $\frac{x^2}{2c_X} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$, $x=x_h, x_l$ である。π_{s2}^{NL} の d_2^{NL} は、上司は2期目に部下のタイプを把握して選択するし、部下も1期目に上司のタイプを知ることができるので、

14　$\bar{\varepsilon}$ が他のケースの場合は後の項を参照されたい。

$$\{\sigma_b^* x_h + (1-\sigma_b^*)x_l\} w_2^{NL} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$$

ならば $d_2^{NL}=1$ を選択する。σ_b^* は部下のタイプを知った上で上司がアップデートした信念である。d_1 が分離のケースを考えているので、部下は上司のシグナルを w_1 選択時点で知っていることに注意する。

次に1期目の上司が一括である場合を考える[15]。1期目の上司が一括のとき、部下は w_1 を決める時点で上司のタイプを知らない。

さらに2期目の上司も一括の場合、w_2 を選択する時点でも上司のタイプが分からない。しかし学習が成功した場合には上司のタイプの情報は不要である。2期目の上司が分離の場合、w_2 を選択する時点では上司のタイプを把握できる。

部下は均衡経路上から逸脱する w_1 を選択して、上司による2期目の選択に影響を与えることが可能である。しかし、上司と部下の利害の一致から、部下は上司に対して偽った情報を与える誘因を持たない。このとき、部下が w_1 を選択した場合の期待利得は次式である。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_s] =& \{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\} w_1 - c_X w_1^2 \\
&+ Prob[\gamma_b=1]\Bigg[LH(w_1)\left[d_2^{LH}|_{\gamma_b=1}\left\{\frac{x_h^2}{2c_X} - c_X\left(\frac{x_h}{2c_X}\right)^2\right\} + (1-d_2^{LH}|_{\gamma_b=1})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&\qquad + LL(w_1)\left[d_2^{LL}|_{\gamma_b=1}\left\{\frac{x_l^2}{2c_X} - c_X\left(\frac{x_l}{2c_X}\right)^2\right\} + (1-d_2^{LL}|_{\gamma_b=1})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&\qquad + \{1-L(w_1)\}\Bigg(d_2^{NL}|_{\gamma_b=1}\left[\{\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=1} x_h + (1-\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=1})x_l\} w_2^{NL}|_{\gamma_b=1} - c_X(w_2^{NL}|_{\gamma_b=1})^2\right] \\
&\qquad\qquad + (1-d_2^{NL}|_{\gamma_b=1})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{c_Y}\right)^2\right\}\Bigg)\Bigg] \\
&+ Prob[\gamma_b=0]\Bigg[LH(w_1)\left[d_2^{LH}|_{\gamma_b=0}\left\{\frac{x_h^2}{2c_X} - c_X\left(\frac{x_h}{2c_X}\right)^2\right\} + (1-d_2^{LH}|_{\gamma_b=0})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&\qquad + LL(w_1)\left[d_2^{LL}|_{\gamma_b=0}\left\{\frac{x_l^2}{2c_X} - c_X\left(\frac{x_l}{2c_X}\right)^2\right\} + (1-d_2^{LL}|_{\gamma_b=0})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&\qquad + \{1-L(w_1)\}\Bigg(d_2^{NL}|_{\gamma_b=0}\left[\{\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=0} x_h + (1-\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=0})x_l\} w_2^{NL}|_{\gamma_b=0} - c_X(w_2^{NL}|_{\gamma_b=0})^2\right] \\
&\qquad\qquad + (1-d_2^{NL}|_{\gamma_b=0})\left\{\frac{y^2}{2c_Y} - c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

15　本稿で検討の対象としているのは上司の1期目の選択が分離戦略であるような均衡なので、この場合は本論に直接関係しない。

ここで$Prob[\gamma_b=1]=\sigma_s^* p+(1-\sigma_s^*)(1-p)$，$Prob[\gamma_b=0]=\sigma_s^*(1-p)+(1-\sigma_s^*)p$である。また、$x$の学習に成功した場合には$\gamma_b$の値に関わらず$d_2$も$w_2$も同じである。ゆえに上の期待利得の式は次のように書き直すことができる。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_s] =& \{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l\}w_1 - c_X w_1^2 \\
&+ LH(w_1)\left[d_2^{LH}\left\{\frac{x_h^2}{2c_X}-c_X\left(\frac{x_h}{2c_X}\right)^2\right\}+(1-d_2^{LH})\left\{\frac{y^2}{2c_Y}-c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&+ LL(w_1)\left[d_2^{LL}\left\{\frac{x_l^2}{2c_X}-c_X\left(\frac{x_l}{2c_X}\right)^2\right\}+(1-d_2^{LL})\left\{\frac{y^2}{2c_Y}-c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\right] \\
&+ \{1-L(w_1)\}\Bigg[\{\sigma_s^* p+(1-\sigma_s^*)(1-p)\}\Bigg\{d_2^{NL}|_{\gamma_b=1}\left[\{\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=1}x_h+(1-\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=1})x_l\}w_2^{NL}|_{\gamma_b=1}-c_X(w_2^{NL}|_{\gamma_b=1})^2\right] \\
&\qquad + (1-d_2^{NL}|_{\gamma_b=1})\left\{\frac{y^2}{2c_Y}-c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\Bigg\} \\
&\qquad + \{\sigma_s^*(1-p)+(1-\sigma_s^*)p\}\Bigg\{d_2^{NL}|_{\gamma_b=0}\left[\{\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=0}x_h+(1-\sigma_s^{**}|_{\gamma_b=0})x_l\}w_2^{NL}|_{\gamma_b=0}-c_X(w_2^{NL}|_{\gamma_b=0})^2\right] \\
&\qquad + (1-d_2^{NL}|_{\gamma_b=0})\left\{\frac{y^2}{2c_Y}-c_Y\left(\frac{y}{2c_Y}\right)^2\right\}\Bigg\}\Bigg] \\
\equiv& \{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l\}w_1 - c_X w_1^2 + \sigma_s^*\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1\pi_{2s}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1\pi_{2s}^{LL} + \left(1-\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1\right)\pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*,\sigma_s^{**}(d_2))
\end{aligned}
$$

FOCから部下が選択するw_1の水準は、$\bar{\varepsilon}$が十分に大きいとき次式である[16]。

$$
w_1^* = \frac{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X}+\frac{1}{2c_X}\left[\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH}+(1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL}-\pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*,\sigma_s^{**}(d_2))\right]\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}
$$

π_{s2}^{LH}とπ_{s2}^{LL}は上司の１期目が分離の場合と共通である。そして$\pi_{s2}^{LH},\pi_{s2}^{LL}$の$d_2^{LH},d_2^{LL}=1$となる条件も同様で、$\frac{x^2}{2c_X}\geq\frac{y^2}{2c_Y}$，$x=x_h,x_l$である。$\sigma_s^*$は上司の１期目が一括である今回のケースでは事前のままであり、σ_s^{**}は$d_1=1$のケースを考えているので$\gamma_b=1$のアップデートか、事前のままかの２通りであり、d_2が一括か分離かによって変わる。上司がd_2を選択するとき、部下のタイプは上司に知られている。ゆえに上司は２人分のシグナルでアップデートしたσ_b^*と、部下が選ぶであろうw_2^{NL}にしたがってd_2^{NL}を決定する。そしてd_2^{NL}は、$\{\sigma_b^*(\gamma_b)x_h+(1-\sigma_b^*(\gamma_b))x_l\}w_2^{NL}(\sigma_s^{**})\gtreqless\frac{y^2}{2c_Y}$の条件にしたがって選択される[17]。

16　$\bar{\varepsilon}$が他のケースの場合は後の項を参照されたい。

17　よって構造的には１期間モデルと類似しており、分離均衡のもとでは均衡が存在しない領域が出現する可能性がある。

3.4.1　逸脱の誘因

以上の分析では $\pi_{s2}^{LH}, \pi_{s2}^{LL}, \pi_{s2}^{NL}$ は w_1 に依存しない前提で w_1 を調べた。部下は自分のタイプを偽る逸脱を行うことで上司の2期目の意思決定 d_2 に影響を与えることができる。しかし、仮に影響を与えることができたとしても、部下は得をせず、逸脱の誘因はないと言える。

まず学習に成功した場合を考える。このとき真実の x は上司・部下ともに2期目の時点で共有知識である。そして上司が $d_2 = 1$ を選択する条件は $\frac{x^2}{2c_X} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ である。他方、部下にとって $d_2 = 1$ の方が望ましい条件は $\frac{x^2}{2c_X} - \left(\frac{x}{2c_X}\right)^2 c_X = \frac{x^2}{4c_X} \geq \frac{y^2}{4c_Y}$ である。これらの条件は同値なので、上司・部下の利害は完全に一致している。ゆえに部下はわざわざ自分のタイプを偽って上司の決定を変えるような逸脱を行う意味がない。

これは学習しなかった場合も同様である。学習しなかった場合には d_1, d_2 の少なくとも一方が分離である場合と、d_1, d_2 がともに一括である場合で部下が w_2 を選択する時点での信念が異なる。まずは d_1, d_2 の少なくとも一方が分離である場合を考える。このとき各プレイヤーは2期目の意思決定を行う時点で互いのタイプを認識している。ゆえに $\sigma_b^* = \sigma_s^{**}$ であることに注意する。

上司が $d_2 = 1$ を選択する条件は $\frac{\{\sigma_b^* x_h + (1-\sigma_b^*) x_l\}^2}{2c_X} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ である。部下が $d_2 = 1$ を好む条件は、$\frac{\{\sigma_s^{**} x_h + (1-\sigma_s^{**}) x_l\}^2}{4c_X} \geq \frac{y^2}{4c_Y}$ である。$\sigma_b^* = \sigma_s^{**}$ なので、両条件は同値である。したがって学習した場合と同様に、部下にタイプを偽る逸脱を行う誘因はない。

最後に学習せずに d_1, d_2 がともに一括の場合を考える。このとき $d_2 = 1$ で一括の場合と $d_2 = 0$ で一括の場合の2通りがある。直観的には $d_2 = 1$ の一括を考えると、$\gamma_b = 0$ というより悲観的な情報を上司が持っていたとしても、上司は X案を選択していると部下にはわかる。上司と部下の $d_2 = 1$ を好む条件式が同じ形を持つことに注意すると、より厳しい条件で d_2 を好むと上司が言っているなら、部下としては上司がどちらのタイプであってもその決定に異存はないはずである。同様に $d_2 = 0$ という一括を考えるときも、$\gamma_b = 1$ というより楽観的な情報をもとにしても Y案が好ましいと判断しているので、部下としてはその判断を覆そうと思う誘因はないはずである。

まずは d_1 は一括で d_2 も $d_2=1$ で一括のケースを考える。上司は部下のシグナルも用いた意思決定を行えるが、部下は自分のシグナルのみしか使えず、上司のシグナルは未知である。$\gamma_s=i$ であるとして、上司が一括で $d_2=1$ を選択しているならば、上司は次の条件式をともに満たしていると部下にはわかる。

$$\{\sigma_{1i}x_h+(1-\sigma_{1i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{2c_X}\geq\frac{y^2}{2c_Y}$$
$$\{\sigma_{0i}x_h+(1-\sigma_{0i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{2c_X}\geq\frac{y^2}{2c_Y}$$

$\sigma_{1i}\geq\sigma_{0i}$より下の式が満たされるならば上の式も満たされる。部下にとって γ_b の値は未知だが、上司が $\gamma_b=0$ であってもX案を選ぶと分かっているので、次式が言える。

$$\{\sigma_{0i}x_h+(1-\sigma_{0i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{2c_X}\geq\frac{y^2}{2c_Y}\iff\{\sigma_{0i}x_h+(1-\sigma_{0i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{4c_X}\geq\frac{y^2}{4c_Y}$$

さらに $\sigma_s^{**}=\sigma_i>\sigma_{0i}$ なので、

$$\{\sigma_{0i}x_h+(1-\sigma_{0i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{4c_X}\geq\frac{y^2}{4c_Y}\Longrightarrow\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}^2}{4c_X}\geq\frac{y^2}{4c_Y}$$

である。ゆえに上司が $d_2=1$ を一括で選択する条件を満たすとき、部下が $d_2=1$ を好む条件も満たされているので他のタイプと偽る逸脱の誘因はない。

同様に d_1 が一括で d_2 も $d_2=0$ で一括の場合を考える。$d_2=0$ を一括で選択するとき、

$$\{\sigma_{1i}x_h+(1-\sigma_{1i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{2c_X}<\frac{y^2}{2c_Y}$$
$$\{\sigma_{0i}x_h+(1-\sigma_{0i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{2c_X}<\frac{y^2}{2c_Y}$$

である。このとき上の式を満たすならば下の式も満たされる。さらに $\sigma_s^{**}=\sigma_i<\sigma_{1i}$ なので、

$$\{\sigma_{1i}x_h+(1-\sigma_{1i})x_l\}\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}}{2c_X}<\frac{y^2}{2c_Y}\Longrightarrow\frac{\{\sigma_s^{**}x_h+(1-\sigma_s^{**})x_l\}^2}{4c_X}<\frac{y^2}{4c_Y}$$

である。つまり上司が $d_2=0$ を一括で選ぶ条件を満たすとき、部下も $d_2=0$ を好む。ゆえに上司が d_2 を一括で選択する場合も部下に逸脱の誘因はない。

3.4.2　w_1^* の場合分け

引き続きX案が選ばれている場合を考える。1期目の仕事量 w_1^* が十分に大きくなると、w_1 を増加させても学習に成功する確率が1で一定のままとなる。

これを考慮したとき，部下のタイプ (γ_s, c_X) ごとに w_1^* は次の3通りが考えられる。また式中の π_{s2} は学習の結果に応じた部下の2期目の利得を表し、上司と部下の利害の一致から以下のように表すことができる。

$$w_1^* = \begin{cases} \dfrac{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X} + \dfrac{1}{2c_X}\left[\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL} - \pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*, \sigma_s^{**}(d_2))\right]\dfrac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}} \\ \dfrac{2\bar{\varepsilon}}{x_h - x_l} \\ \dfrac{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi_{s2}^{LH} &= \max\left\{\frac{x_h^2}{4c_X}, \frac{y^2}{4c_Y}\right\},\ \pi_{s2}^{LL} = \max\left\{\frac{x_l^2}{4c_X}, \frac{y^2}{4c_Y}\right\} \\ \pi_{s2}^{LL} &= \max\left\{\{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l\}\frac{\sigma_s^{**} x_h + (1-\sigma_s^{**})x_l}{4c_X}, \frac{y^2}{4c_Y}\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

ただし $\left[\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL} - \pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*, \sigma_s^{**}(d_2))\right] > 0$ である。よって2期目からの利得は w_1 が大きく学習確率が高まるほど高くなる。

$\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL} > \pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*, \sigma_s^{**}(d_2))$ となるのは、学習に成功したとき部下と上司は d_2 の意思決定について完全に利害が一致しているので、部下にとって望ましい案が常に選択されることに注意する。学習に成功すれば、部下は学習した内容の下で実現可能な最大の利得を得る。学習しない場合には期待値のまま仕事量を選択せざるをえず、σ_s^{**} がより精度の高いものにアップデートされるかもしれないが、学習できる場合の精度1には及ばない。よって学習したときの利得の期待値は、しなかった場合の期待利得を上回る。

また次図の通り、$\bar{\varepsilon}$ の値によって部下の最終的な期待利得を最大化する w_1^* が異なることがわかる。

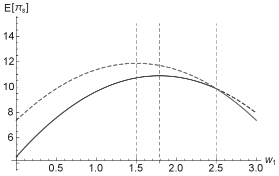


図1：$\bar{\varepsilon}$ =10

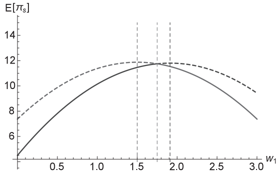


図2：$\bar{\varepsilon} = 7$

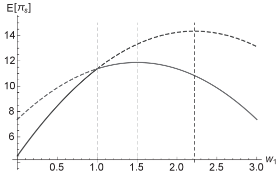
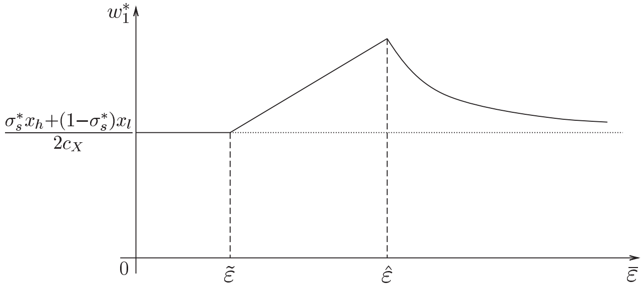


図3：$\bar{\varepsilon} = 4$

上図は $x_h = 10,\ y = 3,\ x_l = 2,\ \sigma_s^* = \frac{1}{2},\ c_X = 2,\ c_Y = 1$ の場合を考えている。$\bar{\varepsilon}$ の値に応じて w_1^* の数値が異なることがわかる。

3.4.3　誤差の大きさと学習する誘因の関係

誤差の大きさ $\bar{\varepsilon}$ と学習のために w_1 を増やす誘因の関係を考える。w_1^* の場合分けより、横軸に $\bar{\varepsilon}$、縦軸に w_1^* をとると次のように図示できる。



$\frac{2\bar{\varepsilon}}{x_h-x_l}=\frac{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X}$ を満たす $\bar{\varepsilon}$ を考えると、$\tilde{\varepsilon}$ は次式である。

$$\tilde{\varepsilon}=\frac{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l}{4c_X}(x_h-x_l)$$

他方、$\hat{\varepsilon}$ は

$$\frac{2\bar{\varepsilon}}{x_h-x_l}=\frac{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X}+\frac{1}{2c_X}\left[\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH}+(1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL}-\pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*,\sigma_s^{**}(d_2))\right]\frac{x_h-x_l}{2\bar{\varepsilon}}$$

を満たす $\bar{\varepsilon}>0$ を考えると次式である。

$$\hat{\varepsilon}=\frac{(x_h-x_l)\left[\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l+\sqrt{8c_X\{\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH}+(1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL}-\pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*,\sigma_s^{**}(d_2))\}+\{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l\}^2}\right]}{8c_X}$$

この図に解釈を与えると、誤差 $\bar{\varepsilon}$ が十分に小さいとき、学習のために特別なコストをかけなくても必ず学習に成功する。よってこの場合の仕事量は１期目の利得を最大化する水準を選択することが最適である。$\bar{\varepsilon}$ がある程度大きくなると学習に成功するためにはより大きな仕事量 w_1 を選択することが必要になる。このため学習のコストが十分に小さい範囲で $\bar{\varepsilon}$ が大きくなると、ちょうど確率１で学習に必ず成功する $w_1^*=\frac{2\bar{\varepsilon}}{x_h-x_l}$ を選択する。しかし更に $\bar{\varepsilon}$ が大きくなると学習のコストが過度に高くなるので、学習のためにコストをかける効率が低下して w_1^* は誤差の増大とともに減少していく。しかし学習効果を全く考慮しない（１期目だけの利得を最大化する）水準 $w_1^*=\frac{\sigma_s^* x_h+(1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X}$ を下回ることはない。

現実の事象で以上の結果は、たとえばチェーンの飲食店で本社から新しいメニューの採用を指示された店長の行動などが当てはまる。上司にあたる本社が新メニューの採用を決定したもとで部下にあたる店長が宣伝量を選択する。客層が完全に固定されていて誤差が十分に小さい（今回は偶然に多く・少なく売れたという状況が実現しない）とき、新メニューの評判を学習するために追加的な宣伝を行うまでもなく、学習に成功するので追加的な学習の誘因はない。そして、客層が大きく変動して誤差が十分に大きい（区画整理などで周辺の所得水準が今後大きく変わりうるなど、今回の評判が多少極端であっても、２期目の参考にならないほど学習が難しい）ときにも、その程度が大きいほど学習の誘因は小さくなる。他方、ほどほどに誤差が存在するならば２期目にもメニューを残すかという意思決定を助けるために学習の誘因が発生しうる[18]。

3.5　１期目上司の選択

１期目の上司の選択が分離である場合に限定して考えていることに注意する。このとき部下は１期目の時点で上司のシグナル γ_b を知ることができるので、w_1 を選択する時点以降では上司のシグナルも含めた信念を意思決定に用いる。

まずは $d_1=1$（X案）を選択した場合に得られる期待利得を考える。$d=1$ が選択されたもとで部下が１期目に選択する仕事量 w_1^* は次式のように書き直すことができる。

$$w_1^* = \mathrm{Median}\left\{ \frac{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X} + \frac{1}{2c_X}\left[\sigma_s^*\pi_{s2}^{LH} + (1-\sigma_s^*)\pi_{2s}^{LL} - \pi_{s2}^{NL}(\sigma_s^*, \sigma_s^{**}(d_2))\right]\frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}},\right.$$
$$\left. \frac{2\bar{\varepsilon}}{x_h - x_l},\ \frac{\sigma_s^* x_h + (1-\sigma_s^*)x_l}{2c_X} \right\} \qquad (2)$$

18　あるいは、組織の文脈を外れて学習効果のみに着目するならば、新しくできた八百屋の質を学習する状況を考えることもできる。八百屋は鮮度の良い野菜を仕入れるタイプか、悪い野菜を仕入れるタイプの２種類である。目利きのプロであれば仕事量にあたる商品購入に対して誤差が十分に小さいので、追加的な購入を通じた学習を必要としない。また、全く知識もなく鮮度の判断もできない消費者も学習が困難であるため、追加的な購入を通じて学習を行う誘因は小さい。他方，ある程度の誤差がある一般的な消費者であれば、その店の真価を知るために学習を目的とした追加的な購入を行う誘因が存在すると考えられる。

以降では、1期目に選択した場合の上司の利得を記述する。1期目にX案を選択すると、上司は次の利得を得る。

$$\mathbb{E}[\pi_b] = q_{hh}\{pr^h_{1h} + (1-p)r^h_{0h}\} + q_{hl}\{pr^h_{1l} + (1-p)r^h_{0l}\} + q_{lh}\{(1-p)r^l_{1h} + pr^l_{0h}\} + q_{ll}\{(1-p)r^l_{1l} + pr^l_{0l}\}$$

ここで q_{ij}は $x = x_i, c_X = c_{Xj}$である確率を表し、$q_{hh} = \sigma_b\eta$, $q_{hl} = \sigma_b(1-\eta)$, $q_{lh} = (1-\sigma_b)\eta$, $q_{ll} = (1-\sigma_b)(1-\eta)$ である。また、r^k_{ij}とは、真実が $x = x_k$ かつ部下のタイプが $\gamma_s = i, c_X = c_{Xj}$であるとき実現する業績の期待値を表す。

ゆえに、r^h_{ij}, r^l_{ij} は次式で表すことができる。

$$r^h_{ij} = x_h w_{ij} + \min\left\{\frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_{ij}, 1\right\}\pi^{LH}_{s2} + \max\left\{0, \left(1 - \frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_{ij}\right)\right\}\pi^{NL}_{s2}$$
$$r^l_{ij} = x_l w_{ij} + \min\left\{\frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_{ij}, 1\right\}\pi^{LL}_{s2} + \max\left\{0, \left(1 - \frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_{ij}\right)\right\}\pi^{NL}_{s2}$$

ここで w_{ij}とは $(\gamma_s, c_X) = (i, c_{Xj})$ である部下が選択する1期目の仕事量であり式(2)によって決まる。均衡経路上の各 π_{s2} は式(1)にしたがって決まる。均衡経路外では $\pi^{LH}_{s2}, \pi^{LL}_{s2}$ は式(1)の通りだが、π^{NL}_{s2} については上司が分離戦略で d_1 を選択することから逸脱する場合に限り、上司と部下の信念が異なることに注意する。たとえば $\gamma_b = 0$ の上司が $d_1 = 1$ を選択した場合、学習に失敗した下で上司が予想する2期目の業績は、部下のタイプが $(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh})$ ならば、次式のようになる[19]。

$$\max\left\{\{\sigma_{01}x_h + (1-\sigma_{01})x_l\}\frac{\sigma_{11}x_h + (1-\sigma_{11})x_l}{2c_{Xh}},\ \frac{y^2}{2c_Y}\right\}$$

次に $d_1 = 0$（Y案）を選択した場合の期待利得を考える。このとき1期目の業績を通じた学習効果は発生しない。1期目に実現する業績は $w_1 = \frac{y^2}{2c_Y}$ である[20]。2期目に実現する業績の期待値は、$\gamma_b = i$ のとき次のように表すことが

19　部下は $d_1 = 1$ を観察すると $\gamma_b = 1$ であると考えるが、逸脱した上司は $\gamma_b = 0$ である。このとき上司が2期目に X案を選択すれば部下は $\frac{\sigma_{11}x_h + (1-\sigma_{11})x_l}{2c_{Xh}}$ だけの仕事を行うが、$x = x_h$ である確率は部下の予想とは異なり σ_{01} になる。
よって上司は 2期目に、このX案を選んだ場合の期待値とY案を選んだ場合の業績を比べて大きい方を選択するので、π^{NL}_{s2} がこの式のように表される。

20　ここでY案を選択した場合の1期目の業績が一意になるのは、モデルの設定における部下に X案の情報が伝わるタイミングに依存している。もし部下にX案の情報が上司の行動 d_1 より前に伝わるのであれば、上司がY案を選択するとしても部下が仕事量の微小な調整によってX案に関して自分が持つ情報を上司に伝えよう

できる[21]。

$$\max\left\{\sigma_i\eta x_h\left(p\frac{\sigma_{01}x_h+(1-\sigma_{01})x_l}{2c_{Xh}}+(1-p)\frac{\sigma_{00}x_h+(1-\sigma_{00})x_l}{2c_{Xh}}\right)\right.$$
$$+\sigma_i(1-\eta)x_h\left(p\frac{\sigma_{01}x_h+(1-\sigma_{01})x_l}{2c_{Xl}}+(1-p)\frac{\sigma_{00}x_h+(1-\sigma_{00})x_l}{2c_{Xl}}\right)$$
$$+(1-\sigma_i)\eta x_l\left((1-p)\frac{\sigma_{01}x_h+(1-\sigma_{01})x_l}{2c_{Xh}}+p\frac{\sigma_{00}x_h+(1-\sigma_{00})x_l}{2c_{Xh}}\right)$$
$$\left.+(1-\sigma_i)(1-\eta)x_l\left((1-p)\frac{\sigma_{01}x_h+(1-\sigma_{01})x_l}{2c_{Xl}}+p\frac{\sigma_{00}x_h+(1-\sigma_{00})x_l}{2c_{Xl}}\right),\frac{y^2}{2c_Y}\right\}$$

このとき、次の結果が言える。

命題１． 上司・部下ともに１期目が分離戦略になるような均衡が存在する。

例えば $\alpha=0.3,\ \eta=0.97,\ p=0.8,\ x_h=10,\ y=5,\ x_l=1,\ c_{Xh}=3,\ c_Y=2,$ $c_{Xl}=1,\ \bar{\varepsilon}=15$ の 場合を考える。このときどちらのタイプの上司も分離戦略から逸脱する誘因を持たない。さらに部下の選択する１期目のタイプごとの仕事量 $w_1(\gamma_s, c_X)$ も、次のような分離戦略を選択する。

$w_1(1,h)\approx 1.5326,\ w_1(1,l)\approx 4.42727,\ w_1(0,h)\approx 0.694792,\ w_1(0,l)\approx 2.78975$

上記のようなパラメータのもとで、ひとつのパラメータが変化したときの上司の意思決定に対する影響を考える。次の図は上記パラメータのもとで、ひとつのパラメータ以外を固定して、そのパラメータが変化したときの状況を表している。すなわち、縦軸に上司が $d_1=1$ を選択した場合と $d_1=0$ を選択した場合の期待利得の差、横軸に当該パラメータをとって、$\gamma_b=1$ の上司の利得、$\gamma_b=0$ の上司の利得をそれぞれ表している。

とする可能性がある。本稿におけるＸ案とは上司の腹案であり、上司による指示があってから部下がその存在を認識するような案を想定している。なお、Ｙ案を選んだ場合には部下のタイプが全て上司に伝わる場合にも、Ｙ案が選択される誘因が強まるものの、以降で例示するパラメータのままでも、上司・部下ともに１期目に分離戦略を選択する均衡が実現する。

21　d_1 が分離戦略の場合を考えているので、$d_1=0$ を観察した部下は $\gamma_b=0$ と予想していることに注意する。

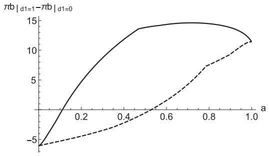


図４：α の影響

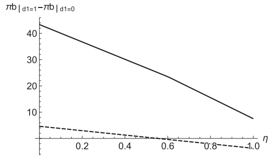


図５：η の影響

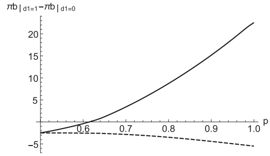


図６：p の影響

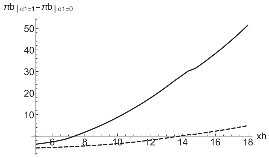


図７：x_h の影響

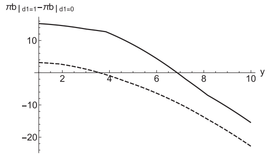


図８：y の影響

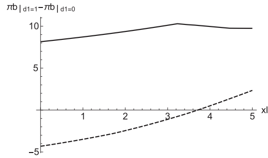


図９：x_l の影響

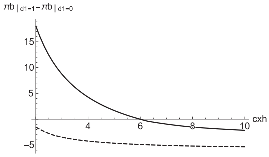


図10：c_{Xh} の影響

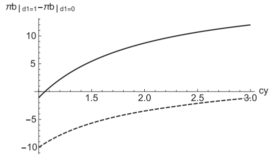


図11：c_Y の影響

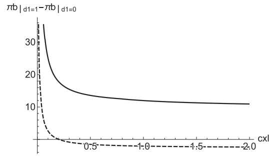


図12：c_{Xl} の影響

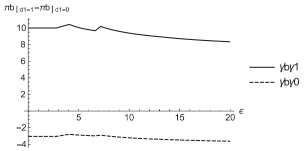


図13：$\bar{\varepsilon}$ の影響

特に α の影響に関して、$\gamma_b = 1$ が α が十分に大きいとき下落しているのは、学習効果の存在が影響していると考えられる。X案の業績に関する係数の値が確定しているとき、１期目に学習する誘因は小さくなる。他方 α が $\frac{1}{2}$ 周辺でX案の不確実性が大きいときほど、１期目に学習に成功しておくメリットが大きくなる。よって α の値が中途半端なときほど学習する誘因が強まるため、X 案が有利な方向、すなわち線分が上に引き上げられるような効果が強く現れていると考えられる。

次に、各パラメータ変化に伴う部下の１期目の仕事量 w_1 への影響を図示する。図の縦軸は w_1 であり、横軸に各パラメータをとっている。各線分は、$(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh}), (1, c_{Xl}), (0, c_{Xh}), (0, c_{Xl})$ というタイプである部下の選択する w_1 の水準を表している。

特に ε については、前で述べた通り誤差が小さいときには学習に追加的な費用を支払うまでもなく確率１で学習できるため、１期目のみに関する最適化が行われる。これが各線分の左側に現れる水平の部分である。逆に誤差が大きいときには、確率１で学習できるほど費用をかけるとかえって利得が下がるため，学習のための追加的な費用の支払い自体は行うものの、学習に成功する確率は１未満となるような仕事量を選択する。その中間的な誤差の値であるならば、確率１で学習に成功するような仕事量を選択する。この部分では誤差の大きさに比例した仕事量が選択される。

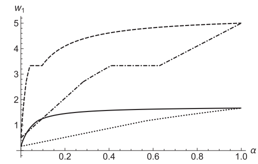


図14：α の影響

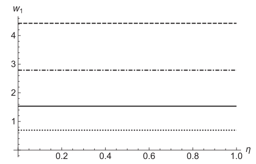


図15：η の影響

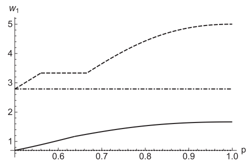


図16：p の影響

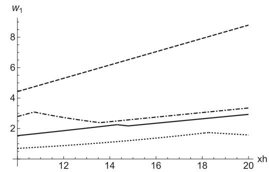


図17：x_h の影響

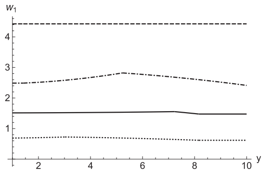


図18：y の影響

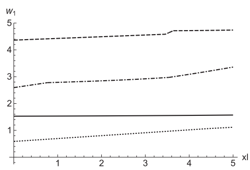


図19：x_l の影響

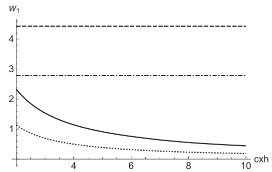


図20：c_{Xh} の影響

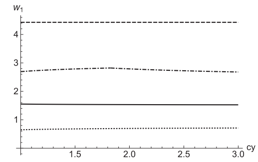


図21：c_Y の影響

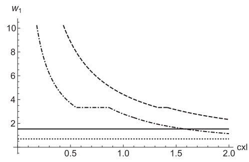


図22：c_{Xl} の影響

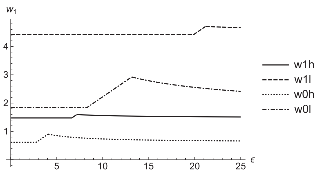


図23：$\bar{\varepsilon}$ の影響

4　２期間モデルの分析（部分一括の場合）

次に１期目の部下による仕事量の選択について、部下のタイプが $(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh})$ と $(0, c_{Xl})$ の場合に同じ w_1 を選択するような均衡が存在するか確認する。ただし、前で分析した分離均衡の場合と同様に、d_1 が分離戦略である均衡の存在を考える。

まず、２期目の部下の行動は分離均衡の場合と同様である。よって２期目の上司の意思決定から考える。

4.1　２期目上司の意思決定

まずは学習に成功した場合から考える。１期目の仕事量 w_1 から（γ_s, c_X)の値が $(1, c_{Xl})$ または $(0, c_{Xh})$ のどちらか一方であると確定した場合、分離均衡の場合と同様に $\frac{x^2}{2c_X} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ ならば $d_2 = 1$ を選択する。他方 w_1 が（$\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh}$）または $(0, c_{Xl}$）のときに一括で選ばれる w_1 を観察した場合を考える。学習に成功しているので上司にとって x の値は既知である。しかし c_X の値は未知であり、アップデートされた上司が $c_X = c_{Xh}$ であると予想する確率を η^* とする。η^* の値は学習した x の結果によって、次のように書くことができる。

$$\eta^*|_{x=x_h} = \frac{p\eta}{p\eta + (1-p)(1-\eta)}$$
$$\eta^*|_{x=x_l} = \frac{(1-p)\eta}{(1-p)\eta + p(1-\eta)}$$

そして x の値を学習したもとで、$\eta^* \frac{x^2}{2c_{Xh}} + (1-\eta^*)\frac{x^2}{2c_{Xl}} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ ならば $d_2 = 1$ を選択する。

4.1.1　上司と部下の利害

１期目にX案が選択されたとき、部下は w_1 を通じて２期目の上司の意思決定に影響を与えることができる。ここでは上司と部下の利害が一致して、１期目にX案が選択されたとき、部下が上司の２期目の意思決定を操作する誘因を持たない条件を考える。

まずは学習に成功している場合の利害の一致を考える。まず分離戦略の w_1 を観察した場合には、上司が $d_2 = 1$ を好む条件が $\frac{x^2}{2c_X} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ で、部下が $d_2 = 1$ を好む条件が $\frac{x^2}{4c_X} \geq \frac{y^2}{4c_Y}$ なので、両者の利害は一致している。

他方、部分一括戦略の w_1 を観察したとき、上司が $d_2 = 1$ を選択する条件は $\eta^* \frac{x^2}{2c_{Xh}} + (1-\eta^*)\frac{x^2}{2c_{Xl}} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ である。部下が $d_2 = 1$ を好む条件は $\frac{x^2}{4c_X} \geq \frac{y^2}{4c_Y}$ であるが、$x = x_h$ と学習した場合に上司はY案を好むがコストの低い部下はX

案を好むという状況が $\frac{x_h^2}{2c_{Xl}} \leq \frac{y^2}{2c_Y}$ のとき実現するし、$x = x_l$ と学習した場合に上司はX案を好むがコストの高い部下はY案を好むと言う状況が $\frac{x_l^2}{2c_{Xh}} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ のとき実現する。$\frac{x_h^2}{2c_{Xl}} \leq \frac{y^2}{2c_Y}$ と $\frac{x_l^2}{2c_{Xh}} \geq \frac{y^2}{2c_Y}$ を同時に満たすパラメータは存在しないので、部下は w_1 を通じて上司の2期目の意思決定を操作しようとする誘因を持つ。しかし均衡経路外の w_1 が選択されたとき上司は部分一括戦略の場合と同様の信念のアップデートを行うと仮定すれば、逸脱の可能性を考えるならば分離戦略として w_1 を選択するタイプの w_1 への逸脱のみを確認すれば良い。

次に学習に失敗した場合の利害の一致を考える。まず分離戦略の w_1 を観察して部下のタイプが一意に定まった場合には、分離均衡の場合と同様に利害が一致する。一方、$(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh}), (0, c_{Xl})$ のとき部分一括戦略として選択される w_1 を観察したとき、上司は部下のタイプを部分的にしか知ることができない。いま上司の1期目の選択d_1 は分離戦略である場合を考えていることに注意すると、上司が $d_2 = 1$ を選択する条件は $x = x_i, c_X = c_{Xj}$ であると上司が予想する確率を q_{ij} とすると、次式のように表すことができる。

$$q_{hh}x_h w_{1h} + q_{hl}x_h w_{0l} + q_{lh}x_l w_{1h} + q_{ll}x_l w_{0l} \geq \frac{y^2}{2c_Y} \tag{3}$$

ここで w_{1h}とは $(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh})$ の部下が選択する2期目の仕事量を表し、

$$w_{1h} = \frac{\sigma_{11}x_h + (1-\sigma_{11})x_l}{2c_{Xh}}$$
$$w_{0l} = \frac{\sigma_{10}x_h + (1-\sigma_{10})x_l}{2c_{Xl}}$$

である[22]。

また q は γ_b の値に応じて次のように計算できる。

22　部下の信念が $\sigma_s^{**} = \sigma_{11}$ や σ_{10} のように $\gamma_b = 1$ を前提にしているのは、今考えているのはX案が選ばれたときの w_1 を通じて2期目の仕事量を操作しようとする誘因を考えているためである。X案が選ばれるとき分離戦略を考えているので上司は $\gamma_b = 1$ というシグナルを受け取っている。よって $\gamma_b = 1$ のもとで部下のアップデートされた信念を考えている。

$$q_{hh}|_{\gamma_b=1} = \frac{\alpha p^2\eta}{\alpha p^2\eta + (1-\alpha)(1-p)^2\eta + \alpha p(1-p)(1-\eta) + (1-\alpha)(1-p)p(1-\eta)}$$
$$q_{hl}|_{\gamma_b=1} = \frac{\alpha p(1-p)(1-\eta)}{\alpha p^2\eta + (1-\alpha)(1-p)^2\eta + \alpha p(1-p)(1-\eta) + (1-\alpha)(1-p)p(1-\eta)}$$
$$q_{lh}|_{\gamma_b=1} = \frac{(1-\alpha)(1-p)^2\eta}{\alpha p^2\eta + (1-\alpha)(1-p)^2\eta + \alpha p(1-p)(1-\eta) + (1-\alpha)(1-p)p(1-\eta)}$$
$$q_{ll}|_{\gamma_b=1} = \frac{(1-\alpha)(1-p)p(1-\eta)}{\alpha p^2\eta + (1-\alpha)(1-p)^2\eta + \alpha p(1-p)(1-\eta) + (1-\alpha)(1-p)p(1-\eta)}$$

$$q_{hh}|_{\gamma_b=0} = \frac{\alpha(1-p)p\eta}{\alpha(1-p)p\eta + (1-\alpha)p(1-p)\eta + \alpha(1-p)^2(1-\eta) + (1-\alpha)p^2(1-\eta)}$$
$$q_{hl}|_{\gamma_b=0} = \frac{\alpha(1-p)^2(1-\eta)}{\alpha(1-p)p\eta + (1-\alpha)p(1-p)\eta + \alpha(1-p)^2(1-\eta) + (1-\alpha)p^2(1-\eta)}$$
$$q_{lh}|_{\gamma_b=0} = \frac{(1-\alpha)p(1-p)\eta}{\alpha(1-p)p\eta + (1-\alpha)p(1-p)\eta + \alpha(1-p)^2(1-\eta) + (1-\alpha)p^2(1-\eta)}$$
$$q_{ll}|_{\gamma_b=0} = \frac{(1-\alpha)p^2(1-\eta)}{\alpha(1-p)p\eta + (1-\alpha)p(1-p)\eta + \alpha(1-p)^2(1-\eta) + (1-\alpha)p^2(1-\eta)}$$

ここで、$\gamma_{b=}\ i$ のもとで上司と部下の利害が一致するのは次の条件を全て満たす場合である。

$$\begin{cases} q_{hh}x_h w_{1h} + q_{hl}x_h w_{0l} + q_{lh}x_l w_{1h} + q_{ll}x_l w_{0l} \geq \dfrac{y^2}{2c_Y} \\ \dfrac{\{\sigma_{i1}x_h + (1-\sigma_{i1})x_l\}^2}{4c_{Xh}} \geq \dfrac{y^2}{4c_Y} \\ \dfrac{\{\sigma_{i0}x_h + (1-\sigma_{i0})x_l\}^2}{4c_{Xl}} \geq \dfrac{y^2}{4c_Y} \end{cases} \tag{4}$$

4.2　部下の 1 期目仕事量の選択

上司が1期目にX案を選択した場合における部下の仕事量を考える。部下のタイプが分離戦略になる場合、すなわち $(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xl}), (0, c_{Xh})$ である場合の1期目の仕事量 w_1 は分離均衡の場合と同じである。よって $(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh}), (0, c_{Xl})$ で同じ1期目の仕事量を選択する場合の w_1 を導出する。

部下のタイプが $(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh})$ または $(0, c_{Xl})$ と判明したもとで、部下のタイプが $(\gamma_s, c_X) = (i, c_{Xj})$ である事前の確率を $Prob\ [i, j]$ とすると、それぞれ次式で表される。

$$Prob[1,h] = \frac{\{\alpha p + (1-\alpha)(1-p)\}\eta}{\{\alpha p + (1-\alpha)(1-p)\}\eta + \{\alpha(1-p) + (1-\alpha)p\}(1-\eta)}$$
$$Prob[0,l] = \frac{\{\alpha(1-p) + (1-\alpha)p\}(1-\eta)}{\{\alpha p + (1-\alpha)(1-p)\}\eta + \{\alpha(1-p) + (1-\alpha)p\}(1-\eta)}$$

このとき w_1 を選択した部下の期待利得は次式によって表すことができる。

$$Prob[1,h]\mathbb{E}[\pi_s^{1h}(w_1)] + Prob[0,l]\mathbb{E}[\pi_s^{0l}(w_1)]$$

いま上司の１期目の選択は分離戦略の場合を考えているので、部下は $\gamma_b = 1$ であると考えることに注意する。このとき $\mathbb{E}[\pi_s^{1h}(w_1)], \mathbb{E}[\pi_s^{0l}(w_1)]$ は次式の通りである。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_s^{1h}(w_1)] =& \{\sigma_{11}x_h + (1-\sigma_{11})x_l\}w_1 - c_{Xh}w_1^2 \\
&+ LH(w_1)\pi_{s2}^{LH}(1h) + LL(w_1)\pi_{s2}^{LL}(1h) + NL(w_1)\pi_{s2}^{NL}(1h) \\
\mathbb{E}[\pi_s^{0l}(w_1)] =& \{\sigma_{10}x_h + (1-\sigma_{10})x_l\}w_1 - c_{Xl}w_1^2 \\
&+ LH(w_1)\pi_{s2}^{LH}(0l) + LL(w_1)\pi_{s2}^{LL}(0l) + NL(w_1)\pi_{s2}^{NL}(0l)
\end{aligned}$$

$$LH(w_1) = \sigma_s^* \min\left\{\frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1, 1\right\},\ LL(w_1) = (1-\sigma_s^*)\min\left\{\frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1, 1\right\},\ NL(w_1) = \max\left\{1 - \frac{x_h - x_l}{2\bar{\varepsilon}}w_1, 0\right\}$$

$$\pi_{s2}^{LH}(ij) = \begin{cases} \dfrac{x_h^2}{4c_{Xj}} & \text{if } \eta^*\frac{x_h^2}{2c_{Xh}} + (1-\eta^*)\frac{x_h^2}{2c_{Xl}} \geq \frac{y^2}{2c_Y} \\ \dfrac{y^2}{4c_Y} & \text{else} \end{cases}$$

$$\pi_{s2}^{LL}(ij) = \begin{cases} \dfrac{x_l^2}{4c_{Xj}} & \text{if } \eta^*\frac{x_l^2}{2c_{Xh}} + (1-\eta^*)\frac{x_l^2}{2c_{Xl}} \geq \frac{y^2}{2c_Y} \\ \dfrac{y^2}{4c_Y} & \text{else} \end{cases}$$

$$\pi_{s2}^{NL}(ij) = \begin{cases} \dfrac{\{\sigma_{1i}x_h + (1-\sigma_{1i})x_l\}}{4c_{Xj}} & \text{if 式（3）} \\ \dfrac{y^2}{4c_Y} & \text{else} \end{cases}$$

よって分離均衡の場合と同様に、誤差の程度に応じて３通りの $w_1^*(1h, 0l)$ を計算できる。

さらに上司の１期目の意思決定については、部下が分離戦略を選択するケースと同様に考えることができる。まず１期目に上司がX案を選択するときの期待利得は次式である。

$$\mathbb{E}[\pi_b] = q_{hh}\{pr^h_{1h0l} + (1-p)r^h_{0h}\} + q_{hl}\{pr^h_{1l} + (1-p)r^h_{1h0l}\} + q_{lh}\{(1-p)r^l_{1h0l} + pr^l_{0h}\} + q_{ll}\{(1-p)r^l_{1l} + pr^l_{1h0l}\}$$

たとえば r^l_{0h} は分離戦略の場合と同様に真実が $x = x_l$ で部下のタイプが $(\gamma_s, c_X) = (0, c_{Xh})$ のときに実現する全期間を通じた業績の期待値である。r^i_{1h0l} は真実が $x = x_i$ で部下のタイプが分離戦略を選択するタイプである場合に実現する全期間を通じた業績の期待値である。上司が1期目にY案を選択した場合の期待利得は分離戦略の場合と同様である。

ここで均衡経路外を観察したときの上司の信念が部分一括戦略を観察したときと同じものにアップデートされる場合、部下は自分のタイプに合わせた別の w_1 に逸脱する誘因を持つ。ゆえに他の信念で均衡になるものがないか検討する。

たとえば、$\alpha = 0.46,\ \eta = 0.97,\ p = 0.8,\ x_h = 10,\ y = 5,\ x_l = 1,\ c_{Xh} = 3,\ c_Y = 2, c_{Xl} = 1,\ \bar{\varepsilon} = 300$ というパラメータを考える。このとき上司は分離戦略から逸脱する誘因を持たない。さらに部下が均衡経路外の仕事量を選択した場合、上司は $\sigma^*_b = 0$ で η^* は部分一括戦略を選択したときと同じものを持つと仮定すると、部下にも逸脱の誘因が生じない[23]。

すなわち次の結果が得られる。

命題2. 上司が分離戦略を選択し、部下はタイプが $(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xh}), (0, c_{Xl})$ のときのみ同じ1期目の仕事量 w_1 を選択するような部分一括戦略を選択する均衡が存在する。

このような均衡が得られるために重要なのは部下が w_1 を選択した際の均衡経路外における上司の信念に対する仮定である。

まず、部下の利得を1期目の業績を通じた利得、2期目に学習に成功した場

23 $\bar{\varepsilon}$ が大きいときほど、2期目に学習に失敗する確率が高まる。いま考えているパラメータのもとでは、学習に失敗した場合における2期目の上司と部下の利害が一致している。よってX案が低いと確信する誤った信念を上司に与えて2期目にX案が実施されなくなるくらいなら、1期目の w_1 を自分のタイプに合わせることによる利得の増加を犠牲にしても良いと考える状況であるため、このような結果が生じていると考えられる。

合の利得、2期目に学習に失敗した場合の利得に分けて考える。ここで想定しているパラメータのもとでは2期目に学習に失敗した場合、上司と部下の利害は均衡経路上で一致する。しかし、今考えている部分一括戦略としての w_1 は、部下が自分のタイプを知ったもとでは、1期目からの利得を最大化しえない。さらに2期目に学習に成功した場合には、利害対立が発生しうる。そこで均衡経路外で上司は、コストに関する信念は部分一括戦略の w_1 が選ばれた場合と同様のアップデートを行い、$x = x_l$ と確信するような信念を上司が持つと仮定して、$\bar{\varepsilon}$ を十分に大きく設定すれば学習に成功する確率が小さくなるため、学習に成功する経路の効果を十分に小さくできる。このとき、学習に失敗した場合の2期目の利害が一致していることに注意すると、部分一括戦略の w_1 から逸脱することで1期目の仕事量がより最適化される一方で、2期目に利害対立が発生するので、2期目の利害対立による損失が十分に大きいとき、部下は逸脱の誘因を持たないと考えられる。

ここで分離戦略の均衡を考えたとき $\alpha = 0.46$, $\eta = 0.97$, $p = 0.8$, $x_h = 10$, $y = 5$, $x_l = 1$, $c_{Xh} = 3$, $c_Y = 2$, $c_{Xl} = 1$, $\bar{\varepsilon} = 300$ と同様にというパラメータのもとで、ひとつのパラメータが変化した場合の影響を考える。

まずは上司の期待利得から考える。各線分は、$\gamma_b = 1$ と $\gamma_b = 0$ である上司の期待利得をそれぞれ表している。

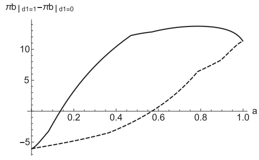


図24：α の影響

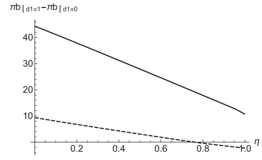


図25：η の影響

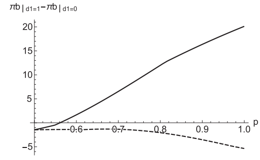


図26：p の影響

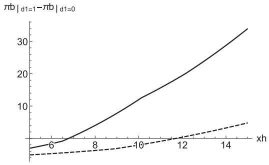


図27：x_h の影響

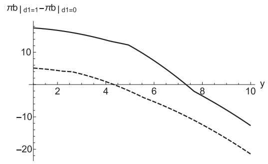


図28：y の影響

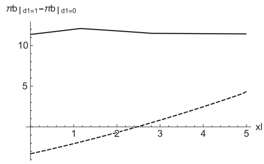


図29：x_l の影響

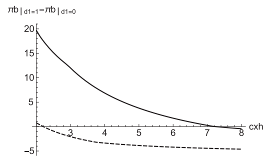


図30：c_{Xh} の影響

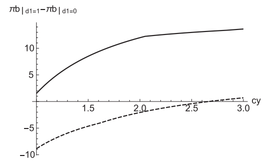


図31：c_Y の影響

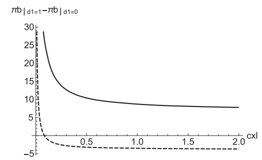


図32：c_{Xl} の影響

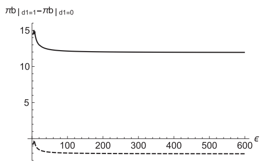


図33：$\bar{\varepsilon}$ の影響（広域）

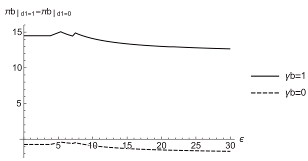


図34：$\bar{\varepsilon}$ の影響（狭域）

次に再び分離戦略のケースと同様に、各パラメータ変化に伴う部下の１期目の仕事量 w_1 への影響を図示する。図の縦軸は w_1 であり、横軸に各パラメータをとっている。各線分は、$(\gamma_s, c_X) = (1, c_{Xl})\,,(0, c_{Xh})\,,(1, c_{Xh})\,,(0, c_{Xl})$ のときに選択される部分一括戦略を選ぶタイプのもとで部下が選択する w_1 の水準をそれぞれ表している。

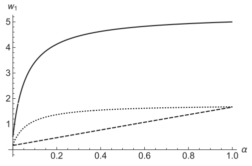


図35：α の影響

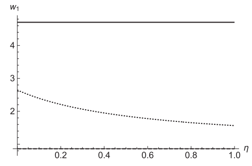


図36：η の影響

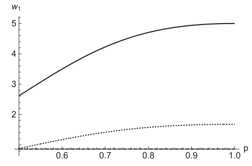


図37：p の影響

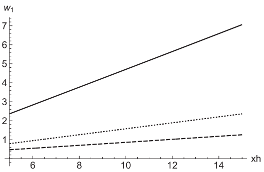


図38：x_h の影響

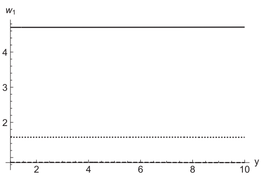


図39：y の影響

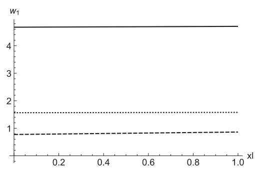


図40：x_l の影響

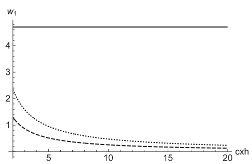


図41：c_{Xh} の影響

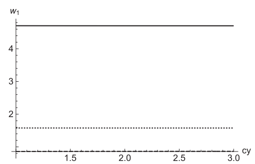


図42：c_Y の影響

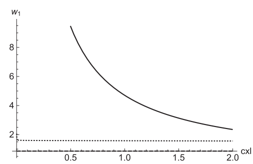


図43：c_{Xl} の影響

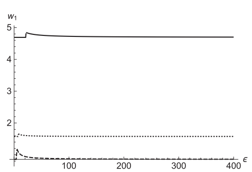


図44：$\bar{\varepsilon}$ の影響（広域）

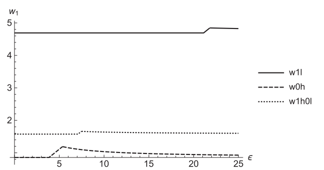


図45：$\bar{\varepsilon}$ の影響（狭域）

5　おわりに

本稿では学習効果の存在を考慮して、２期間に亘る組織の行動について検討した。モデルの特徴は、第１に不確実性の存在する挑戦的な案が選ばれるとき、第１期目の仕事量と業績から、その案がいかほど業績を高めるものであるか、学習できる可能性があることである。第２に上司と部下がともに情報を完全に共有しているのであれば、上司がある案を好むとき部下もその案が選択さ

れることを好むという構造が利得に含まれており、このような意味での利害の一致が存在していることである。

分析の結果、部下が自分のタイプごとに異なる仕事量を選択して、上司に自らのタイプに関する情報を伝達する分離戦略が均衡経路上で実現するような均衡の存在が明らかになった。さらに部下が自分の情報を隠すような行動を行う均衡も存在する。特に後者は、利害が一致しているにも関わらず、部下が上司に対して情報を隠す可能性を示唆している。現実の例を考えると、部下の働きぶりが高いとも低いともいいがたい状況で、部下は革新的な案の質が低いから理想的な仕事を行わないのか、革新的な案のコストが高く面倒だから働かないのか分からないような状況が、互いの利害関係が一致するもとでも生じる可能性があることが指摘できる。

一方で上司と部下の利害が一致することから、上記のような状況が均衡として現れにくいと考えることもできる。そこで上司と部下の利害が対立する場合の分析を行うことが考えられ、例えば上司が意思決定を行うが、各案の仕事量は固定的であり、部下はX案が選ばれた場合にはX案のポテンシャルに関する調査を行うような変更を行うことが考えられる。仕事量が固定のとき、上司と部下の利害が本源的に対立するような状況を生み出しうると考えられる。このように上司と部下の利害の不一致がより多く見られるゲームを想定して、同様に上司と部下の協力関係がどのような構造を持つのか、更に詳しい検討を行うことが今後の課題である。

参考文献

［１］Aghion, P., P.Bolton and B. J. Cepremap,（1991）,“Optimal Learning by Experimentation,” *Review of Economic Studies,* Vol. 58, pp. 621-654 .

［２］Aghion, P., M. Dewatripont and P.Rey,（2002）,“ On Partial Contracting, ” *European Economic Review,* Vol. 46, pp. 745-753.

［３］Aghion, P., M. Dewatripont and P.Rey,（2004）,“ Transferable Control, ” *Journal of the European Economic Association,* Vol. 2, No. 1, pp. 115-138.

［４］Aghion, P. and J. Tirole,（1997）,“Formal and Real Authority in Organizations,” *Journal of Political Economy,* Vol. 105, No. 1, pp. 1-29.

［５］Aghion, P., N. Bloom and J. V. Reenen, （2013）, “Incomplete Contracts and the Internal Organization of Firms,” *NBER WORKING PAPER SERIES,* Working Paper 18842, NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH.

［６］Baker, G., M. Gibbs and B. Holmstrom,（1994）,“The Internal Economics of the Firm: Evidence from Personnel Data,” *Quarterly Journal of Economics,* Vol. 109, Issue 4, pp. 881-919.

［７］Bertocchi, G. and M. Spagat,（1993）,“Learning, Experimentation, and Monetary Policy,” *Journal of Monetary Economics,* Vol. 32, Issue 1, pp. 169-183.

［８］Crawford, V. P. and J. Sobel,（1982）,“Strategic Information Transmission,” *Econometrica,* Vol. 115, No. 500, pp. 185-199.

［９］Dessein, W.（2002）,“Authority and Communication in Organizations,” *Review of Economic Studies,* Vol. 69, pp. 811-838.

［10］ Dur, R. and O. H. Swank,（2005）,“Producing and Manipulating Information,” *The Economic Journal,* Vol. 50, No. 6, pp. 1431-1451.

［11］ Gibbons, R. and K. J. Murphy,（1992）,“Optimal Incentive Contracts in the Presence of Career Concerns: Theory and Evidence,” *Journal of Political Economiy,* Vol. 100, No. 3, pp. 468-505.

［12］ Harris, M., C. H. Kriebel and A. Raviv,（1982）,“Asymmetric Information, Incentives and Intrafirm Resource Allocation,” *Management Science,* Vol. 28, No. 6, pp. 604-620.

［13］ Itoh, H.（2015） ,“Organizing for Change: Preference Diversity, Effort Incentives, and Separation of Decision and Execution,” *RIETI Discussion Paper Series,* 15-E-082.

［14］ Landier, A., D. Sraer and D. Thesmar,（2009）,“Optimal Dissent in Organizations,” *Review of Economic Studies,* Vol. 76, pp. 761-794.

［15］ MacRae, E. C.（1972）,“Linear Decision With Experimentation,” *Annals of Economic and Social Measurement,* Vol. 1, No. 4, pp. 437-447.

［16］ Marino, A. M., J. G. Matsusaka, J. Zábojník,（2010）,“Disobedience and Authority,” *Journal of Economic Behavior and Organization,* Vol. 26, pp. 427-459.

［17］ Mirrlees, J. A.（1976）,“The Optimal Structure of Incentives and Authority within an Organization,” *The Bell Journal of Economics,* Vol. 7, No. 1, pp. 105-131.

［18］ Prescott, E. C.（1972）,“The Multi-Period Control Problem Under Uncertainty,” *Econometrica,* Vol. 40, No. 6, pp. 1043-1058.

［19］ Rothschild, M.（1974）,“Searching for the Lowest Price When the Distribution of Prices

Is Unknown," *Journal of Political Economy,* Vol. 82, No. 4, pp. 689-711.
[20] Wijnbergen, S. van and T. Willems, (2015), "Optimal Learning on Climate Change: Why Climate Skeptics should Reduce Emissions," *Journal of Environmental Economics and Management,* Vol. 70, pp. 17-33.
[21] Willems, T. (2017), "Actively Learning by Pricing: A Model of an Experimenting Seller," *The Economic Journal,* Vol. 127, Issue 604, pp. 2216-2239.