〈論　　文〉

カオス経済現象の数理

岩田　　年浩

（１）実証的カオス分析の提起

今日、カオスに関する研究は各学問分野で行われている。これがかってのカタストロフィーの理論のように一時的現象ではなく持続する可能性が高いという理由は既成の科学が捨象してきた点をこうした研究が数学的手法も含めて合理的にカバーすることができるのではないかという期待があるからである。

通常カオス的研究は方程式において、初期値やパラメーターのわずかな変化が不規則で不安定なまたは不連続な現象を生じることを示そうとするものが多数である。例えば、新古典派マクロ経済モデル[1)]

　$K_t = s\alpha K_t(1 - K_{t-1})/(1+n)$ において、

Kの初期値K0=5.0，パラメーターα=10，人口増加率n=0.01と特定化した場合、

s=0.3以下では収束し、s=0.3では規則的に上下変動し、s=0.37ではカオチックな変動をするというものである（図１参照）。

しかし、現実の経済現象そのものの中に複雑な現象が限りなく存在することを考えれば、このように抽象的な次元での研究だけにとどまってよいのかという問題がある。つまり、実証的にカオス分析をするべきではないのかというのがこの論文の問題提起であり視点である。

なお、従来から盛んに行われてきた数理的な経済モデルによる分析は、それによって経済社会が何を基準に変動するのかを見事に説明してきた。均衡理論

---

1)ここでは、次のDayのモデルを取り上げておく。
　Day, R.(1982) "Irregular Growth Cycle", *American Economic Review* 72,pp.406-414.

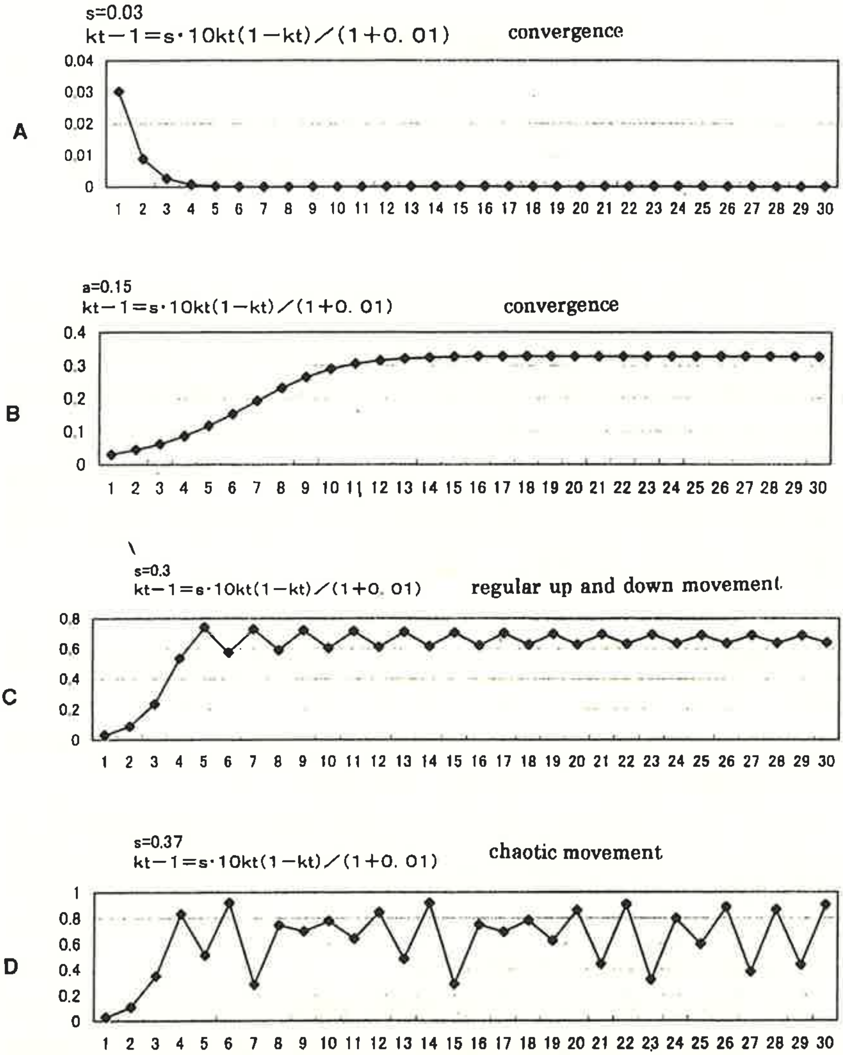

図1．デイのモデルのふるまい

はすべての経済理論に共通した特徴であった。そして理論を支える実証は多くの場合に回帰分析によってなされてきた。これは決定論的にすべてが説明できるという風潮を研究者の中に生み出していった。しかし、従来の研究においては捨象されたものや誤差項に含められたもの（例えば、資源・環境・非合理的経済行動など）のもつ意味が大きいことが注目されてきている。数理的な経済モデルは多大の長所とともに短所も持ってきたわけである。

（2） 複雑なふるまいをする曲線が形成されるわけ

我々の前によく出てくる不規則で不安定な複雑な曲線は、単純な波の集合である。1Hz，2Hz，3Hzの波を足してみると、3Hzは1秒間に波が3回現れるということで、

$$f(X)=\mathrm{Sin}\,\theta+\mathrm{Sin}\,2\theta+\mathrm{Sin}\,3\theta$$

のようになる。

さて、一般に $f(X)=a_o+a\,\mathrm{Sin}\,\theta$ の場合 aは波の高さを、θは波の幅を，a_oは原点からのズレを示す。

複雑な波の合成はフーリエ展開によってなされる。これは、Sin と Cos を用いて次のような式になる。

$$f(X)=a_o+\Sigma\ (a_n\cdot\mathrm{Cos}\,nX+b_n\cdot\mathrm{Sin}\,nX)$$

これをフーリエ級数という。ここで，Xが偶関数か陰関数かによって Cos だけの式や Sin だけの式になる。このようにしてさまざまな複雑な形をした曲線が形成される。メタルの裏側から見れば、複雑な形をした曲線が形成されるわけを理解することができるわけである（図2参照)。

（3） 複雑なふるまいをする曲線をいかにして解明するか？

（2）で見た三角関数の合成による曲線の形成から進んで、複雑な変動をする曲線をいかに分析するかを紹介しておこう。次の3つの方法が考えられる。

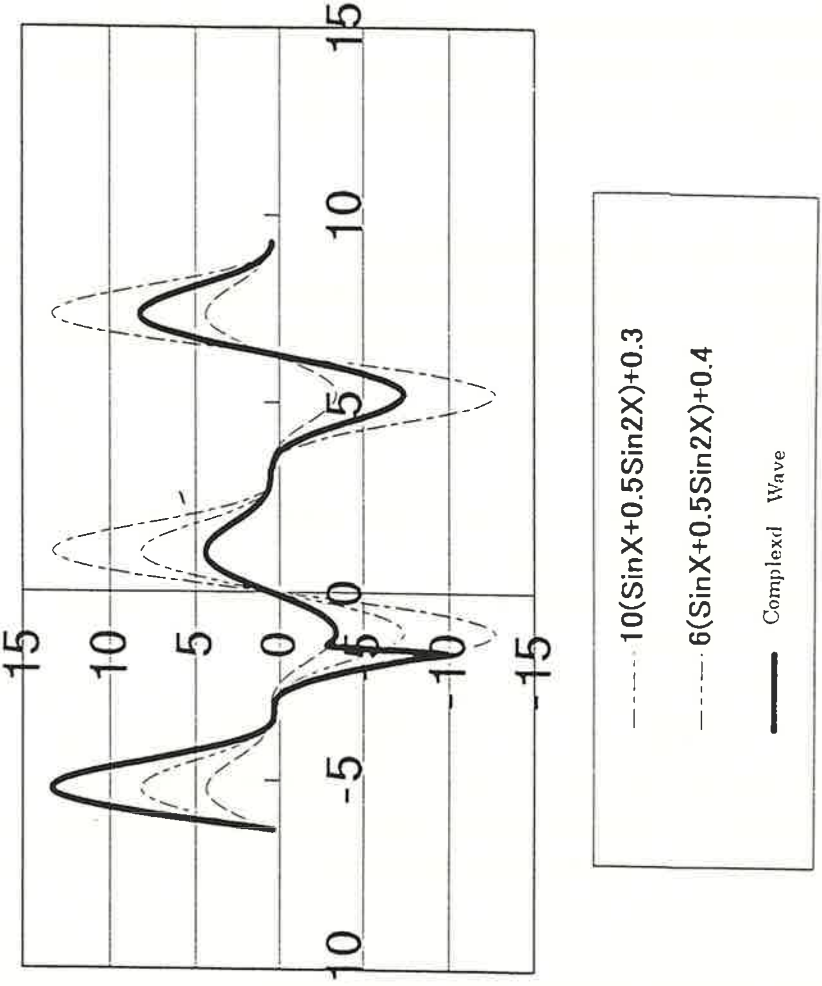

図２．三角関数の合成による複雑な曲線の形成

① 曲線の習性そのものを読み取る方法

これは最も単純な方法で、アメリカのダウ平均株価の動きを示す図３（横軸は移動平均を縦軸は移動勾配をとっている）にあるような場合には、次の移動勾配のピークやボトムを予想しやすい。

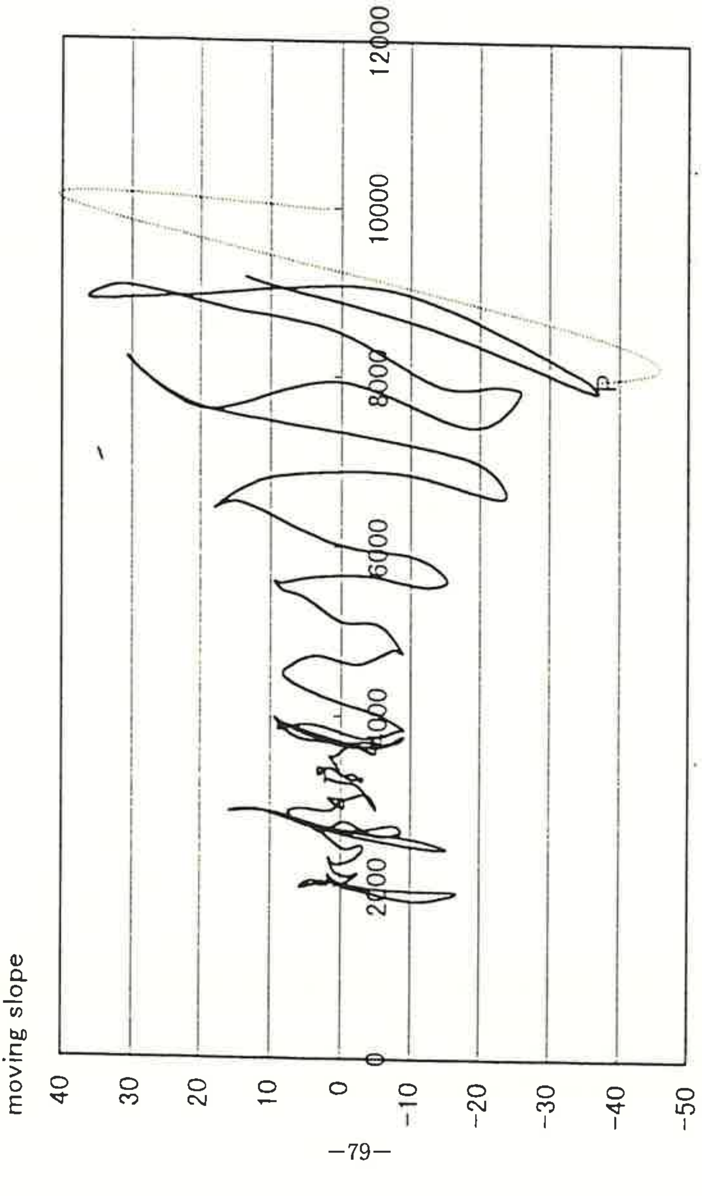

図３．アメリカ工業株ダウ平均株価（月足）1987年４月～99年５月

②移動勾配を取ることによって複雑な変動の根本にあるものを分析する方法

移動勾配は原データではピークやボトムのような転換点を見つけにくい場合に役に立つ。これは微係数に代位できる性質をもっており、つぎの瞬間にどの方向へどれだけの勢いで動くかを示すことができる。[2)]

p +1項の移動勾配Ｘｔ’の一般式は次のように示される。

$$Xt' = \frac{〔-pXt-p-\cdot-2Xt-2-1Xt-1+1Xt+1+2Xt+2+\cdot+PXt+pP〕}{(P+1)(2P+1)/3}$$

図４は日本の主要企業の経常利益の対前年変化率をＸとして、原データからの移動勾配を1回　Ｘｔ’～４回Ｘ”” 計算したものである。この図から次のことが明らかになる。

ｉ）移動勾配を繰り返し取るにつれて、その数値は小さくなる。

ii）移動勾配を繰り返し取った左端の図が示すように、その形はシンプル（ここでのケースでは楕円になる）

図４は移動勾配を４回取ったＸ”” のわずかな変動が原データの大きな変動を呼ぶ。まさにカオスの論理を実証的に示すものとなっている。

2)下記の文献では傾向曲線を導く上で移動勾配と移動平均を組み合わせた勾配の性質をもちいることが提起されている。
Gregg J.V.& C.H.Hossel & T.J.Richardson（1964）*Mathematical Trend Curves : An Aid to Forecasting*, Imperial Chemical Industries Ltd.

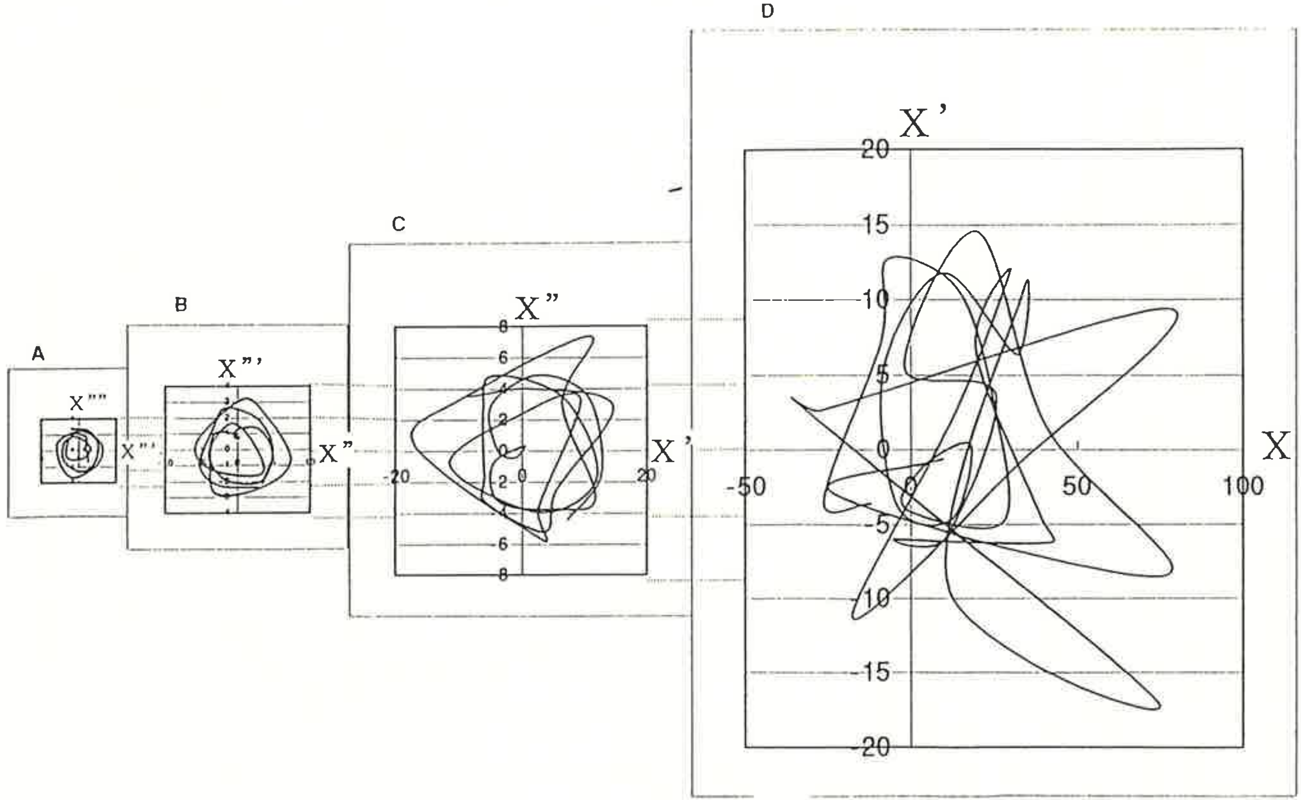

図4. 日本における主要企業の経常利益変化率の移動勾配のふるまい

③ ポアンカレ平面上での分析

ある１つの変数Ｘだけの変動の習性を見るために、縦軸にＸｔ＋１を、横軸にＸｔを取り（これをここではポアンカレ平面としておく)、Ｘの移動勾配Ｘ’＝０とＸｔ＋１の移動勾配Ｙ’＝０を図上に描くと、複雑な変動はより解明しやすくなる。これはポアンカレ平面上の位相図と呼ぶべきもので、筆者の発案になるものである。

具体的に例を示しておこう。図５はアメリカの在庫投資を、図６は日本の実質ＧＮＰを、図７は日本の固定資本投資の対前年変化率を、図８は日本の主要企業の経常利益の対前年変化率を取りあげたものである。いずれも収束と発散の両方を示している。

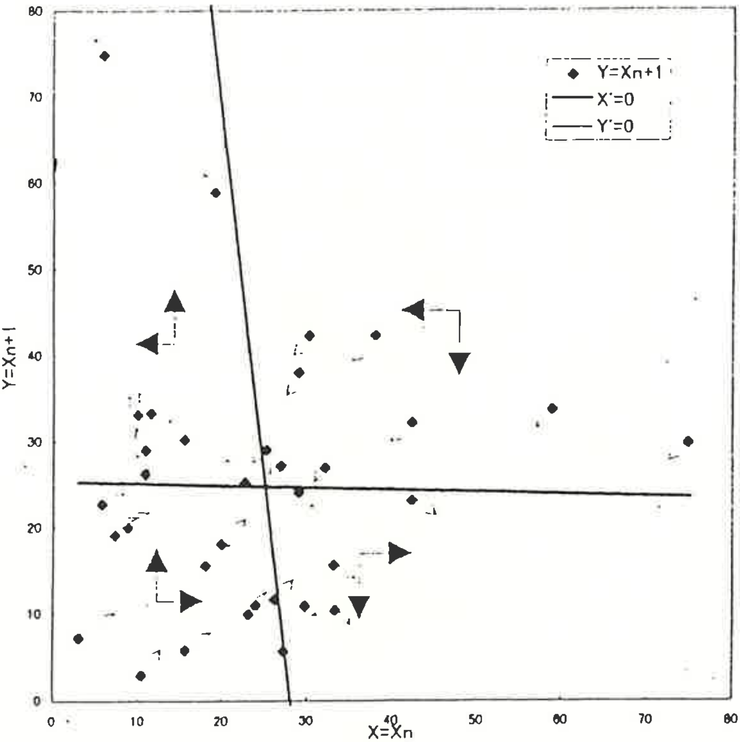

図５．アメリカ主要企業の在庫投資

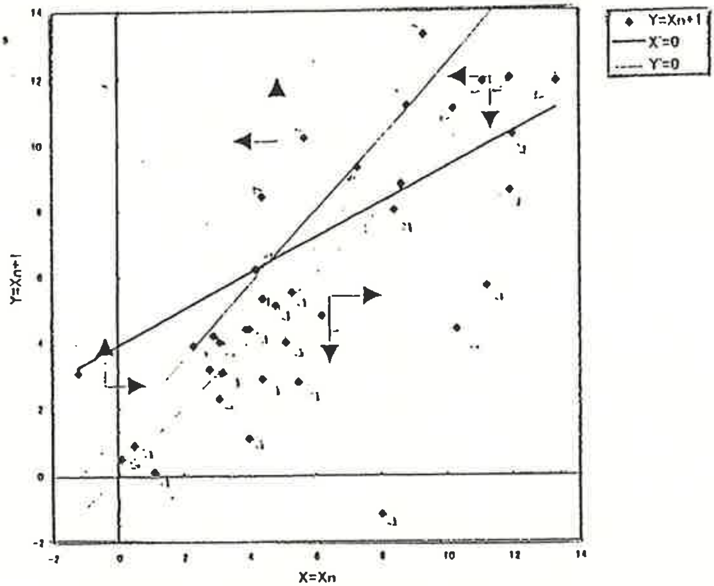

図6．日本の実質GNP

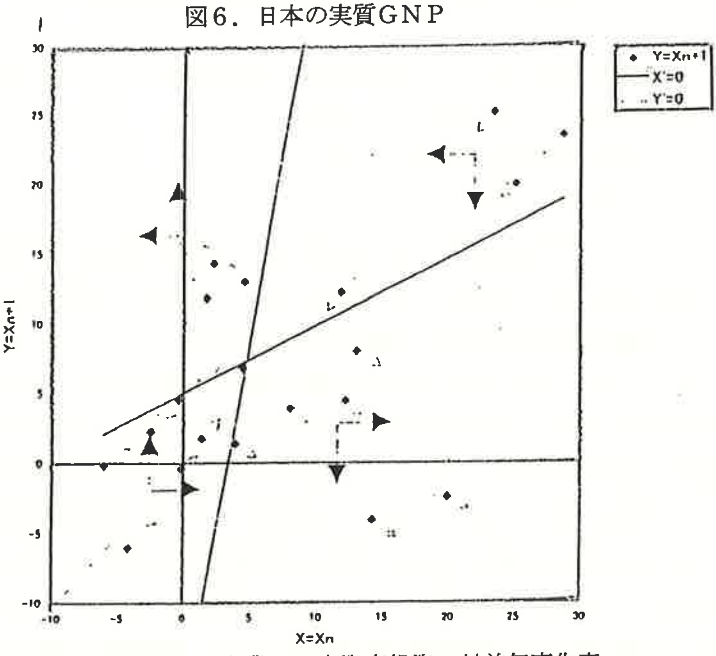

図7．日本の主要企業の固定資産投資の対前年変化率

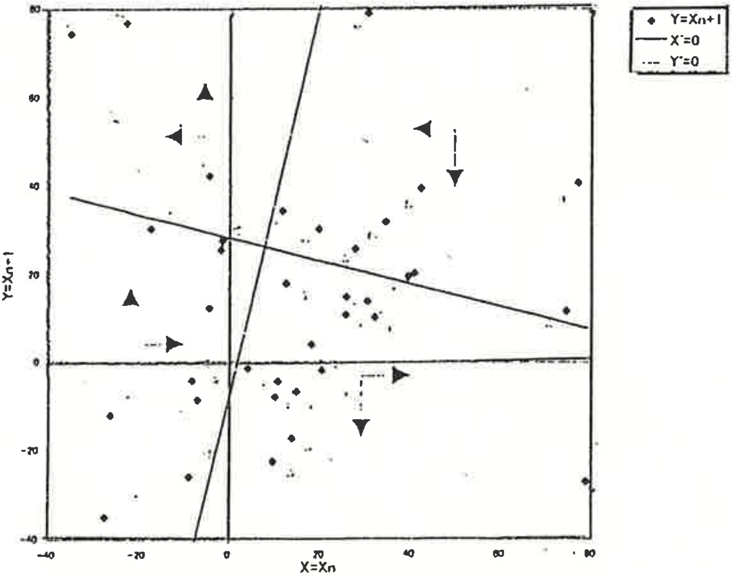

図８．日本の主要企業の経常利益の対前年変化率

経済データの多くはこのように2つの作用を示すことが多いが、これを数式で考えてみると次のようになる。

こうした時系列解析を定式化しておこう。

$$X(t)' = -\alpha X(t) + f(X(t-\tau)) \qquad \alpha > 0$$

ここでこの式の右辺の第１項はＸを減少させる作用を持ち、第２項は時間τだけ前のＸに応じて現在のＸが形成されることを含意する非線型の関数である。この第2項の作用がカオス現象の根本原因となる。

さて、こうしたダイナミズムが単に混沌な現象に終わらないことの意味を論理的に考えてみよう。ポアンカレプロットを与えれば（図９)、Ｘｔ＝Ｘｔ＋１の直線上に軌道を誘導することによって系を安定化させていることがわかる。つまり、直線Ａに沿ってＸｔ＝Ｘｔ＋１に接近し、その後、直線Ｂに沿って離れて行くという態様が考えられる。直線Ａと直線Ｂの交点はサドルポイントとなっており、一見カオス的状態の中での不安定平衡点といえよう。つまり、安定化と不安定化の２つの作用の中での平衡点である。経済理論においてはこの２

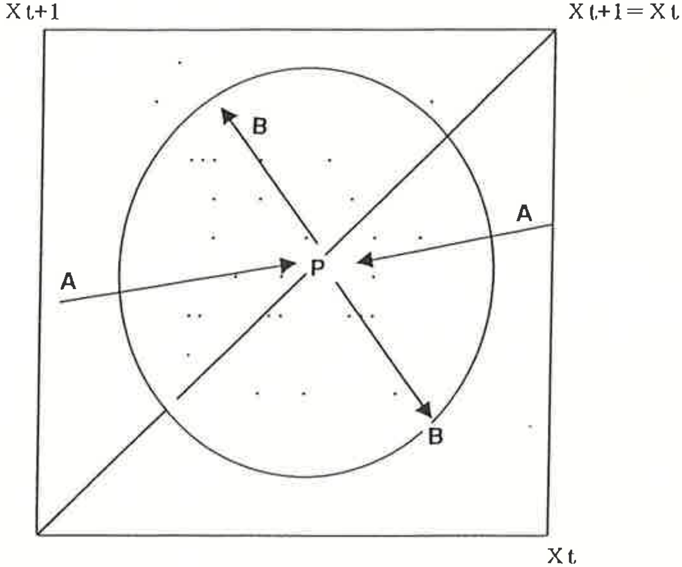

図９．ポアカレ平面上でのカオスコントロール

つの作用の内の一方だけが論議されてきたが、実証から出発した私の研究結果は以上のようになった。このサドルポイントの位置と変動領域は経済社会によって異なる。

このことから経済政策はＢ直線上の上方・下方への系の不安定性に対して、Ｘｔ＝Ｘｔ＋１の直線上に軌道を誘導するような対応こそが根本的に求められることがわかる。この報告のような実証的なカオス研究のアプローチによって、経済分析が“おぼろげなもの”から確かなものへと説得力を増すことが期待される。