<論　文>

コンティンジェント・イミュニゼーションについて

土　橋　敏　光

目　次

§1　初　め　に

債券ポートフォリオの運用方式あるいは投資戦略は，これまで積極的運用戦略と消極的運用戦略に大別されてきた。

積極的運用戦略 (active management strategy)[1] とは，将来の利子率変動を予測することによって投資計画期間中できるだけ高い収益率を達成しようとする攻撃的な運用方法である。この戦略は，利子率予想が的中すれば良い成果をあげることができるが，逆に，利子率予想がはずれた場合には極端に低いあるいは負の収益率に甘んじなければならない。

＊本稿は大阪経済法科大学研究奨励委員会の研究補助金を受けて執筆したものです。

1）積極的投資戦略 (active investment strategy)，積極的ポートフォリオ戦略 (activeportfolio strategy) とも呼ばれる。

消極的運用戦略（passive management strategy）[2] はイミュニゼーション戦略に代表される。イミュニゼーション戦略は当初の時点において収益率の大きさを，その後の利子率変動がどのようなものであれ，その時点で成立している最終利回り水準に確定しようとする戦略である[3]。この投資戦略の欠点は，積極的な利子率予想による，予想が的中した場合のより高い収益率の達成という潜在的可能性をみすみす放棄するという点である。

コンティンジェント・イミュニゼーション[4]（contingent immunization）戦略は，この2つの投資戦略のそれぞれの利点を生かしつつ，それぞれの欠点を克服しようとする折衷的な運用方式であり，混合投資戦略（combination investment strategy）と呼ばれる。すなわち，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略とは，目標収益率に下限を設けて，利子率予想がはずれて実現可能な収益率がその下限収益率を割り込みそうな状態に陥れば，債券ポートフォリオをイミュニゼーション運用に切り換えるが，実現可能な収益率がその下限を上回っている限りは，積極的な運用によってイミュニゼーション運用の際の収益率より高い実現収益率を達成しようと試みる投資戦略である。この戦略においては，イミュニゼーション運用は「セーフティ・ネット(safety net)」として機能することになる[5]。下限収益率は，当初からイミュニゼーション運用を実行した場合に保証される収益率—当初約束された収益率（initially promised rate of return）と呼ばれる—を基準にして，それよりいくらか低い値に定められることになる。

2）消極的投資戦略（passive investment strategy），消極的ポートフォリオ戦略（passive portfolio strategy）とも呼ばれる。

3）イミュニゼーション戦略の詳しい内容については，拙稿〔14〕を参照されたい。

4）コンティンジェント・イミュニゼーションという用語は，Leibowitz and Weinberger, “Contingent Immunization: A New Procedure for Structured Active Management,” Salomon Brothers Inc. Jan. 28, 1981 の中で初めて使用されたとのことである。

5）容易に察しがつくように，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略は株式の「ストップ・ロス取引（stop loss dealing)」に酷似している。

§2　コンティンジェント・イミュニゼーション戦略とは?

債券ポートフォリオを当初からイミュニゼーション運用した場合に達成することが保証される実現収益率を，イミュニゼーション収益率と呼ぶことにしよう。イミュニゼーション収益率は，いわば，100%確実に達成することのできる「当初約束された収益率 (intially promised rate of return)」であり，投資家[6] はイミュニゼーション運用を心掛ける限り，最悪の場合にもこの収益率水準を実現することができる[7]。

コンティンジェント・イミュニゼーション戦略においては，投資家はこのイミュニゼーション収益率を上回る成果をあげようと，ポートフォリオの積極的運用を心掛ける。利子率が予想に反した方向へ動いた時には，債券ポートフォリオの潜在的な実現収益率 (potential realized rate of return) が，一時的にイミュニゼーション収益率を割り込むことが容易に発生することが考えられる。従って，下限収益率 (floor rate of return) をイミュニゼーション収益率と同一の水準に設定して置くと，利子率が予想に反した方向へわずかでも変動すると，投資家は即座にイミュニゼーション運用に戦略を転換しなければならなくなり，投資家の自由裁量の余地は非常に限られたものとなる。下限収益率はイミュニゼーション収益率より少し低めに定められる必要がある。どれだけ低位に設定すべきかという質問に対しては，一義的な解答は得られない。その解答は，投資家が当初約束された収益率よりどれだけ低い収益率を甘受できるかという，投資家の選好あるいは投資方針に依存している。

以下の分析においては，次の仮定を置く。

---

6) 本稿では「投資家」という用語を投資信託ののファンド・マネージャーや機関投資家のポートフォリオ・マネージャーをも含むものとして用いる。

7) これは売買仲介手数料や税などの取引費用が存在しないことを前提にしている。なお，イミュニゼーション運用によって実際に達成される収益率―実現収益率という―はこのイミュニゼーション収益率を若干上回るのが普通である。詳しくは，拙稿〔14〕，§4を参照せよ。

ⓐ債券ポートフォリオに組み入れられる銘柄は固定金利の利付債であり，それらの利払いおよび満期元本償還といった受取りキャッシュ・フローの時期は一致する。

ⓑ各期において支配する利子率の期間構造(term structure of interest rates)はフラットである。ゆえに，第 t 期に支配する利子率は貸付期間の長さにかかわらず，i_t という単一の記号で表記できる。

ⓒ債券の利払いは年2回である。すなわち，債券ポートフォリオは半年復利で価値が増殖していく。また，債券には貸倒れリスク，途中償還リスクはない(default-free, call-free)。

ⓓ当初 i_0 の利子率水準が支配しており，投資家はこの利子率水準で債券を購入する。その後，第 t 期の初めに利子率の期間構造が i_t にシフトする(以後，利子率が i_t に変化すると表現する)。投資家は i_t がそれ以降の投資計画期間中においては変動しないとみなして，潜在的な実現収益率の計算を行い，イミュニゼーション運用へ移行するか否かを決定する。

ノーテイション…本稿で使用される記号とその意味をまとめて列記しておく。

$\overline{V}$：当初の投資資金額（第0期末における利子率変化前の債券ポートフォリオ価値)。

V_0：第0期末における利子率変化後の債券ポートフォリオ価値。

V_t：第 t 期末における債券ポートフォリオ価値（$t=1, 2, 3, \cdots, n$)。

V_q：投資計画期間の終了時点（第 q 期末）における債券ポートフォリオの最終価値(terminal value)。

F_t：第 t 期末における下限ポートフォリオ価値（floor portfolio value)。

n ：ポートフォリオを構成する最長期債券の残存期間数。

q ：債券投資の計画期間数。

i_0 ：第0期に支配している利子率。

i_t ：第 t 期の期首に成立し，その期間中支配する利子率。

$\bar{r}_t$ ：当初から第 t 期末までの t 期間にわたって平均された実現収益率

(realized rate of return)。

$\bar{r}_q$：投資計画期間を通して平均された潜在的実現収益率（potential realized rate of return)。潜在的実現収益率とは，利子率が変動した後，それ以降の投資計画期間中はその利子率水準で一定であるという想定の下で計算された，投資計画期間中の平均された実現収益率である。

r_i：イミュニゼーション収益率(immunization rate of return)。債券購入の当初からイミュニゼーション戦略を採った場合に達成が保証される収益率。

r_f：コンティンジェント・イミュニゼーション戦略における下限収益率（floor rate of return)。

y_t：t 期の期首におけるトリッガー・イールド（trigger yield)。

x：クッション・スプレッド（cushion spread)。

X_t：第 t 期末におけるクッション・マージン(cushion margin)。

S_t：第 t 期末におけるセーフティ・マージン（safety margin)。

$\tilde{c}_t$：債券ポートフォリオの受取りキャッシュ・フロー・パターン。$\tilde{c}_t=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$。

以下の分析では，1期間を半年の長さにとる。フロー変数はすべて半年を単位として表示されているので，年数に修正するには2倍すればよい。n, q, t を年単位に直すと，$n/2$, $q/2$, $t/2$ となる。i_0, i_t, $\bar{r}_t$, $\bar{r}_q$, r_f, r_i, x は半年率(semi-annual rate) 表示だから，年率（annual rate）に直すにはそれぞれ2倍すればよい。

さて，投資家が投資計画期間（investment planning period)[8] の初頭に

8）投資期間（investment period),投資視野(investment horizon),計画期間（planning period)，計画視野（planning horizon）ともいう。

9）Leibowitz and Weinberger〔8〕, pp. 19, 30。Bierwag〔1〕はこれを「セーフティ・マージン」と呼んでいる（138ページ参照)。Leibowitz and Weinberger はクッション・スプレッド概念をより一般化された意味でも用いている。彼らは，「ポートフォリオは時間の経過とともに累積していくので，このクッション・スプレッドは潜在的収益率と下限収益率の開差（スプレッド）として一般化され得る。」(〔8〕, pp. 23-24) と述べている。

おいて決定する最大受容可能損失（maximum tolerable loss）を，元本に対する比率として表わしたものを x とすると，下限収益率 r_f は

$$r_f = r_i - x \qquad (1)$$

によって示される。x の値の大きさは，投資家の危険受容度（degree of risk tolerance）を具現したものである。x は「クッション・スプレッド」と呼ばれる[9)]。

投資に必要な当初の資金額 $\overline{V}$ は

$$\overline{V} = \sum_{\tau=1}^{n} c_\tau (1+i_0)^{-\tau} \qquad (2)$$

によって求められる。$\overline{V}$ は，利子率に変動がなければ，t 期間後の第 t 期末には $(1+i_0)^t \overline{V}$ となる。第 $t+1$ 期の期初において利子率が i_0 から i_{t+1} に変動すると，債券ポートフォリオ価値は

$$V_t = (1+i_0)^t \sum_{\tau=t+1}^{n} c_\tau (1+i_{t+1})^{-\tau+t} \qquad (3)$$

に修正される。

i_{t+1} の利子率が残りの投資計画期間中続くと仮定すれば，ポートフォリオの最終価値 V_q は

$$V_q = V_t (1+i_{t+1})^{q-t} = (1+i_0)^t \sum_{\tau=t+1}^{n} c_\tau (1+i_{t+1})^{-\tau+t} (1+i_{t+1})^{q-t} \qquad (4)$$

となる。$\bar{r}_q$ の定義から

$$V_q = (1+\bar{r}_q)^q \overline{V} \qquad (5)$$

が成立するから，(4)式にこの式を運用すると

$$(1+\bar{r}_q)^q = (1+i_0)^t \frac{1}{\overline{V}} \sum_{\tau=t+1}^{n} c_\tau (1+i_{t+1})^{-\tau+t} (1+i_{t+1})^{q-t} \qquad (6)$$

が得られる。(4)式，(6)式がそれぞれポートフォリオの潜在的最終価値，潜在的実現収益率を直接求める式である。

ところで，$\bar{r}_t$ の定義式

$$(1+\bar{r}_t)\overline{V} = V_t \qquad (7)$$

を (4)式に代入して

$$V_q = (1+\bar{r}_t)^t \overline{V} (1+i_{t+1})^{q-t}$$

を得るが，(5)式を考慮すると

$$(1+\bar{r}_q)^q=(1+\bar{r}_t)^t(1+i_{t+1})^{q-t} \tag{8}$$

という関係式が導かれる。(8)式の両辺の自然対数をとり，両辺を q で割ると

$$\log(1+\bar{r}_q)=\left(\frac{t}{q}\right)\log(1+\bar{r}_t)+\left(\frac{q-t}{q}\right)\log(1+i_{t+1}) \tag{9}$$

となる。また，(8)式において $(q,\ t)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots(q,\ q-1)$ と順次値を入れていくと，

$$(1+\bar{r}_2)^2=(1+\bar{r}_1)(1+i_2)$$

$$(1+\bar{r}_3)^3=(1+\bar{r}_2)^2(1+i_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1+\bar{r}_q)^q=(1+\bar{r}_{q-1})^{q-1}(1+i_q)$$

が得られるので，両辺を辺々相乗じると

$$(1+\bar{r}_q)^q=(1+\bar{r}_1)(1+i_2)(1+i_3)\cdots\cdots(1+i_q) \tag{10}$$

という結果が導き出される。

(8)〜(10)式から，次のことがわかる。

(イ) $1+\bar{r}_q$ は $1+\bar{r}_t$ と $1+i_{t+1}$ の加重幾何平均である。換言すれば，$\log(1+\bar{r}_q)$ は $\log(1+\bar{r}_t)$と $\log(1+i_{t+1})$との加重算術平均である。

(ロ) 潜在的実現収益率 $\bar{r}_q$ は，①当初から現在に至るまでの期間の平均された実現収益率 $\bar{r}_t$ と，②現在の利子率 i_{t+1}，とがわかれば簡単に算出される。

(ハ) $\bar{r}_q$ は $\bar{r}_t$ の値と i_{t+1} の値の中間にある。

(ニ) 投資計画期間を通じて平均された実現収益率 $1+\bar{r}_q$ は，計画期間内の各期の実現収益率 $1+\bar{r},\ 1+i_2,\ 1+i_3,\ \cdots,\ 1+i_q$ の幾何平均である。

ところで，(6)式からわかるように，$\bar{r}_q$ の決定要因は次の 6 つである。

$$\bar{r}_q=f(\overline{V}(i_0,\ \tilde{c}_t,\ n),\ i_0,\ i_{t+1},\ \tilde{c}_t,\ t,\ n,\ q)=g(i_0,\ i_{t+1},\ t,\ q,\ n,\ \tilde{c}_t) \tag{11}$$

これらの要因はその性格によって 4 つに分類できる。

ⓐ $i_{t+1},\ t$ … 将来の未知なる変数であり，投資家にとっては不確実で外生的に与えられる変数。

ⓑ i_0… 現在の変数で既知であるが，市場によって決定され，投資家にとっては外生変数とみなされる変数。

ⓒ $n, \tilde{c}_t$… 同一の最終利回り i_0 を与える債券ポートフォリオでも，銘柄の組合わせ方によって $n, \tilde{c}_t$ は異なる。投資家にとっては選択可能な変数であるが，現実にポートフォリオに組み込める銘柄は有限であり，かつそれらの可分性も完全でないから，選択の余地は制約される。

ⓓ q… 投資家が自己の自由裁量により完全な選択権をもつ変数。

以上の数式展開に基づいて，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略は次のように簡潔に言い表すことができる。

＜収益率ターム＞

コンティンジェント・イミュニゼーション戦略とは，(i) $\bar{r}_q > r_f$ が成立している時，積極的なポートフォリオ運用を心がけ，(ii) $\bar{r}_q = r_f$ が成立する時点でイミュニゼーション運用に転換する，投資戦略である。

今度は，債券ポートフォリオ価値に焦点を当てて，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略の概要を説明しよう。

投資計画期間の終了時点において下限収益率をきっかり実現する債券ポートフォリオの価値を必要ポートフォリオ価値（required portfolio value）と呼び，この価値をあらゆる時点で維持しているポートフォリオを「下限ポートフォリオ（floor portfolio）」と呼ぶ。下限ポートフォリオの投資計画終了時点における価値 F_q は

$$F_q = \overline{V}(1+r_f)^q \tag{12}$$

となる。第 $t+1$ 期の期初における下限ポートフォリオの価値 F_t は，次の関係式を満たす必要がある。

$$F_t = \frac{F_q}{(1+i_{t+1})^{q-t}} \tag{13}$$

(12)，(13)式より，F_t を求める式は

$$F_t = \frac{(1+r_f)^q}{(1+i_{t+1})^{q-t}}\overline{V} \tag{14}$$

となる。

ここで，S_t を

$$S_t = V_t - F_t \tag{15}$$

と定義する。S_t は現実のポートフォリオ価値 V_t と下限ポ ートフォリオ価値 F_t との差であり，その差が正である限り，現実のポートフォリオは下限収益率を上回る潜在的実現収益率をあげることができる。このことは，(15)式を

$$S_t=\frac{\overline{V}}{(1+i_{t+1})^{q-t}}\{(1+\bar{r}_q)^q-(1+r_f)^q\} \tag{16}$$

と変形することにより，$S_t \gtreqless 0$ と $\bar{r}_q \gtreqless r_f$ は同値であることからわかる。この意味で S_t は「セーフティ・マージン (safety margin)」と呼ばれる。ポートフォリオ価値タームでコンティンジェント・イミュニゼーション戦略の内容を要約すると，次のようになる。

<価値ターム>

コンティンジェント・イミュニゼーション戦略とは，(i) 現実のポートフォリオ価値 V_t が下限ポートフォリオ価値 F_t を上回っている限り，投資家は積極的運用を継続し，(ii) V_t が F_t に等しくなる時点で，イミュニゼーション運用に切り換える，投資戦略である。

ところで，セーフティ・マージンはクッション・スプレッドとは類似しているが，異なる概念であることに注意する必要がある。クッション・スプレッドに対応するポートフォリオ価値を，クッション・マージンと呼ぶことにする。イミュニゼーション収益率を上回りも下回りもせず，きっちり実現する債券ポートフォリオを「イミュニゼーション・ポートフォリオ」[10) と呼び，その第 t 期末における価値を I_t で表すと，

$$I_t=\frac{(1+r_i)^q}{(1+i_{t+1})^{q-t}}\overline{V} \tag{17}$$

となる。従って，クッション・マージン X_t は

$$X_t=I_t-F_t=\frac{\overline{V}}{(1+i_{t+1})^{q-t}}\Big\{(1+i_0)^q-(1+r_f)^q\Big\} \tag{18}$$

10) これは，いわゆる「イミュナイズされたポートフォリオ (immunized porfolio)」―投資計画期間とポートフォリオのデュアレーションが一致するポートフォリオ―とは異なる。ある範疇の immunized portfolio, すなわち割引債のみから構成される immunized portfolio, は利子率変動がどのようなものであれ，イミュニゼーション収益率をきっちり実現するから，イミュニゼーション・ポートフォリオの条件を満たす。拙稿〔14〕, p. 10 を参照せよ。

となる。明らかに，$X_t \gtreqless 0$ は $i_0 \gtreqless r_f$ と同値である。

§3　コンティンジェント・イミュニゼーション戦略の説明

仮設例をあげてコンティンジェント・イミュニゼーション戦略の内容を説明しよう。

〔数値例1〕

投資家の投資計画期間は10期間（5年）である。投資家は，表面利率12%，残存期間30年，最終利回り12%の長期債券に投資資金100万円を全額投資する。債券の市場価格は100万円であり，額面価値と一致する。利払いは年2回であり，投資資金は半年復利で運用される。債券売買には手数料，税はかからないものとする。当初のクッション・スプレッドを100ベーシス・ポイントとする。従って，下限収益率は11%になる[11)]。債券を購入した直後に，利子率が i_0 から i_1 に変動し，その後投資計画期間が終了するまで利子率は変わらないと想定する。

表1は，変化後の利子率水準 i_1 のさまざまな異なる値に対して，$\bar{r}_1$, $\bar{r}_{10}$ の値を算出して一覧表にしたものである。$\overline{V}$, V_0, V_1, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_{10}$ を求める計算式を下に記しておく。

$$\overline{V}=\left(\frac{6}{0.06}\right)\left\{1-\frac{1}{(1+0.06)^{60}}\right\}+\frac{100}{(1+0.06)^{60}} \tag{19}$$

$$V_0=\left(\frac{6}{i_1}\right)\left\{1-\frac{1}{(1+i_1)^{60}}\right\}+\frac{100}{(1+i_1)^{60}} \tag{20}$$

$$V_1=(1+i_1)V_0 \tag{21}$$

$$(1+\bar{r}_1)\overline{V}=V_1, \tag{22}$$

$$(1+\bar{r}_{10})^{10}=(1+\bar{r}_1)(1+i_1)^9 \tag{23}$$

表1から次のことが読みとれる。

①投資直後の利子率変動が大きい程，実現収益率 $\bar{r}_1$ と潜在的実現収益率 $\bar{r}_{10}$ の両方とも，イミュニゼーション収益率12%からの乖離が大きくなる。

11）$r_f=r_i-x=i_0-x=0.06-0.005=0.055.$

表1　潜在的実現収益率の算出

（単位$\overline{V}$, V_0, V_1…円，$2i_1$, $2\overline{r}_1$, $2\overline{r}_{10}$…%）

$\overline{V}$	$2i_1$	V_0	V_1	$2\overline{r}_1$	$2\overline{r}_{10}$
1,000,000	10.000	1,189,293	1,248,758	49.752	13.672
1,000,000	10.250	1,162,221	1,221,785	44.357	13.434
1,000,000	10.500	1,136,226	1,195,878	39.176	13.206
1,000,000	10.750	1,111,253	1,170,982	34.196	12.984
1,000,000	11.000	1,087,249	1,147,047	29.409	12.774
1,000,000	11.250	1,064,167	1,124,026	24.805	12.568
1,000,000	11.500	1,041,960	1,101,872	20.374	12.372
1,000,000	11.750	1,020,584	1,080,544	16.109	12.182
1,000,000	12.000	1,000,000	1,060,000	12.000	12.000
1,000,000	12.250	980,168	1,040,203	8.041	11.826
1,000,000	12.500	961,105	1,021,119	4.224	11.658
1,000,000	12.750	942,619	1,002,711	0.542	11.496
1,000,000	13.000	924,835	984,949	－3.010	11.342
1,000,000	13.250	907,670	967,803	－6.439	11.194
1,000,000	13.500	891,065	951,244	－9.751	11.052
1,000,000	13.750	875,083	935,245	－12.951	10.916
1,000,000	14.000	859,608	919,781	－16.044	10.786

②実現収益率は，$2i_1$ が10%の時には49.752%で，$2i_1$ が14%の時には－16.044%と，その変動の幅が極めて大きい。これとは対照的に，潜在的実現収益率の値は13.672%($2i_1$＝10%) から 10.786% ($2i_1$＝14%)へと，その変動の幅が限られている。これは，潜在的実現収益率の場合には，(i) 価格変動リスクの効果が10期間にわたってならされる，(ii)価格変動リスクを相殺するように作用する再投資リスクが10期間にわたって累積的な効果を及ぼす，という事実を反映した結果である。

表2と表3は，それぞれ現実の債券ポートフォリオと下限ポートフォリオの価値が，時間の経過と共にどのように移り変わっていくかを一覧表の形で示したものである。V_t, F_t は次の式から計算される。

$$V_t=(1+i_1)^t V_0 \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots,\ 10) \tag{24}$$

$$F_t=\frac{(1+0.055)^{10}}{(1+i_1)^{10-t}}\overline{V} \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots,\ 10) \tag{25}$$

表 2　債券ポートフォリオ価値の時間的推移

（単位万円）

V_t / $2i_1(\%)$	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
7.000	162.362	168.045	173.926	180.014	186.314	192.835	199.584	206.570	213.800	221.283	229.028
8.000	145.247	151.057	157.099	163.383	169.918	176.715	183.784	191.135	198.781	206.732	215.002
9.000	130.957	136.850	143.008	149.444	156.169	163.196	170.540	178.214	186.234	194.615	203.372
10.000	118.929	124.876	131.120	137.676	144.559	151.787	159.377	167.345	175.713	184.498	193.724
11.000	108.725	114.705	121.014	127.669	134.691	142.099	149.915	158.160	166.859	176.036	185.718
12.000	100.000	106.000	112.360	119.102	126.248	133.823	141.852	150.363	159.385	168.948	179.085
13.000	92.484	98.495	104.897	111.715	118.977	126.710	134.947	143.718	153.060	163.009	173.605
14.000	85.961	91.978	98.417	105.306	112.677	120.565	129.004	138.034	147.697	158.035	169.096
15.000	80.261	86.280	92.752	99.708	107.186	116.225	123.867	133.157	143.144	153.880	165.421
16.000	75.247	81.267	87.768	94.789	102.373	110.562	119.407	128.960	139.277	150.419	162.452
17.000	70.808	76.827	83.357	90.443	98.130	106.472	115.522	125.341	135.995	147.555	160.097

表 3　下限ポートフォリオ価値の時間的推移

（単位万円）

V_t / $2i_1(\%)$	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
7.000	121.094	125.332	129.719	134.259	138.958	143.821	148.856	154.065	159.458	165.039	170.815
8.000	115.396	120.012	124.812	129.806	134.998	140.398	146.013	151.854	157.928	164.245	170.815
9.000	109.992	114.942	120.115	125.520	131.168	137.071	143.239	149.684	156.420	163.459	170.815
10.000	104.865	110.109	115.614	121.395	127.465	133.833	140.530	147.556	154.934	162.681	170.815
11.000	100.000	105.500	111.303	117.425	123.883	130.697	137.885	145.469	153.469	161.910	170.815
12.000	95.382	101.105	107.171	113.602	120.418	127.642	135.301	143.419	152.024	161.146	170.815
13.000	90.997	96.912	103.211	109.920	117.065	124.674	132.778	141.409	150.601	160.390	170.815
14.000	86.834	92.912	99.416	106.375	113.821	121.789	130.314	139.436	149.196	159.640	170.815
15.000	82.878	89.094	95.776	102.959	110.682	118.983	127.906	137.499	147.812	158.898	170.815
16.000	79.120	85.450	92.286	99.669	107.642	116.254	125.554	135.598	146.446	158.162	170.815
17.000	75.549	81.970	88.938	96.498	104.700	113.599	123.256	133.732	145.100	157.443	170.815

表2からわかるように，現実のポートフォリオ価値は，利子率変動直後においては，最大の 162.362 ($2i_1$=7% の場合）から最小の 70.808 ($2i_1$=17%の場合）まで約2.29倍の開きがあるが，時間の経過とともに漸次縮小し，投資計画期間が終了する時点では，最大の 229.028 ($2i_1$=7% の場合）と最小の 160.097 ($2i_1$=17% の場合）の間で約1.43倍の格差がある。

下限ポートフォリオ価値の格差は現実のポートフォリオ価値に比べてはるかに小さい（表3を参照)。そして，その格差は時間の推移とともに縮小していき，投資計画期間の終了時点においては，下限ポートフォリオ価値は，いかなる利子率水準に対応するものであれ，同じ価値170.815に収束する。もちろん，これは目標とする収益率が11%で同一であるという事実を反映したものである。

さて,グラフを利用してコンティンジェント・イミュニゼーション戦略の概要を説明しよう。図1は，表1に基づいて利子率変動と潜在的実現収益率との関係を図示したものである。潜在的実現収益率の曲線が右下がりになっているのは，当初の利子率水準で計算したポートフォリオ・デュアレーションが17.132期間（8.566年）であり投資計画期間の10期間（5年）を超えているからである。もし投資計画期間中利子率が当初の年率12%の水準のままで推移するならば，

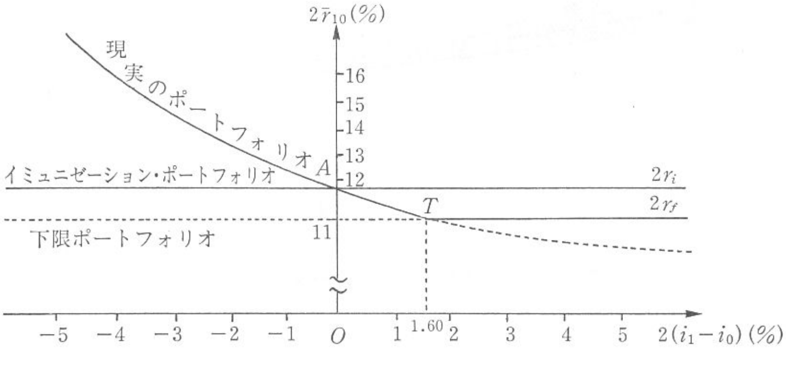

図1　潜在的実現収益率とクッション・スプレッド

潜在的実現収益率も年率12%を達成する（点 A）。利子率が下落するならば，イミュニゼーション収益率を超える収益率の達成が可能であり，下落率が高い程収益率は高くなる。逆に，利子率が上昇するならば，イミュニゼーション収益率を下回る収益率しかあげられず，しかも上昇率が高い程収益率は低くなる[12)]。100ベーシス・ポイントのクッション・スプレッドが設定されているから，$2\bar{r}_{10}=0.11$ となる点 T が，イミュニゼーション運用に切り換えるか否かの分岐点であり，その意味で点 T は「トリッガー・ポイント(trigger point)」と名付けられている。そして，トリッガー・ポイントに対応する利子率水準は「トリッガー・イールド（trigger yield)」と呼ばれる。実際のポートフォリオ運用では利子率がトリッガー・イールドに達する以前に，イミュニゼーション運用に切り換える準備をしておく必要がある。そのため，日々のモニタリングが重要になってくる。

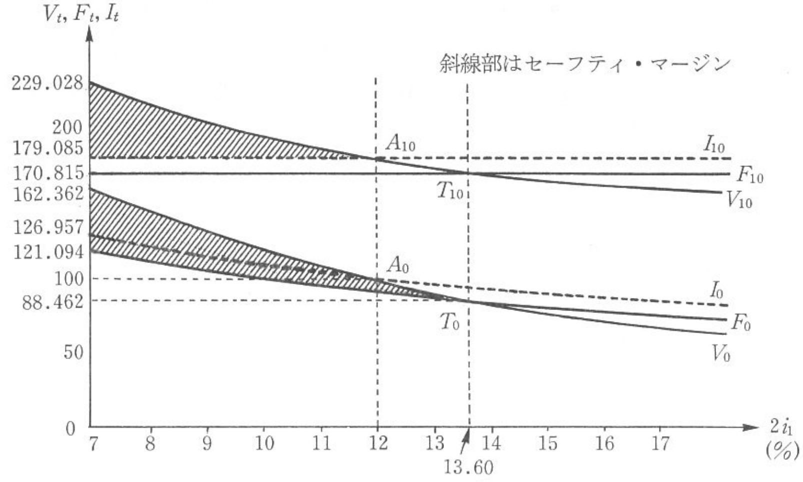

図2　下限ポートフォリオとセーフティ・マージン

12）厳密に言うと，潜在的実現収益率は，利子率の上昇がある限度を超えると，逆に上昇に転じる。図1の例では，$2(i_1-r_i)\fallingdotseq 22.5\%$ がその転換点である。詳しくは，拙稿〔14〕, §4, §5 を参照せよ。

図2は，現実のポートフォリオ，下限ポートフォリオ，そしてイミュニゼーション・ポートフォリオの価値と利子率との関数関係をグラフ化したものである。価値の大きさは評価する時点において変わってくる。図では，利子率変動直後の時点（$t=0$）と投資計画期間の終了時点（$t=10$）の2つの時点におけるそれぞれの価値を描いている。利子率変動直後においては，現実のポートフォリオ価値は V_0 曲線，イミュニゼーション・ポートフォリオ価値は I_0 曲線，そして下限ポートフォリオ価値は F_0 曲線で示される。点 A_0 は V_0 と I_0 両曲線が交わる点であり，利子率が当初の年率12%から全く変動しなかった場合のポートフォリオ価値を表している。そこでは，現実のポートフォリオ価値＝イミュニゼーション・ポートフォリオ価値＝100となる。点 T_0 は，現実のポートフォリオ価値が下限ポートフォリオ価値と等しくなる点である。この点の左側では現実のポートフォリオ価値が下限ポートフォリオ価値を上回り，セーフティ・マージンは正である。セーフティ・マージンは利子率下落が大きい程大きい。逆に，点 T_0 の右側では現実のポートフォリオ価値は下限ポートフォリオ価値を下回り，セーフティ・マージンは負になる。T_0 はトリッガー・ポイントなのである。時間の経過とともにポートフォリオ価値は増殖するため，V_t, I_t, F_t のグラフは上方へシフトし，10期間後の投資計画期間終了時点には V_{10}, I_{10}, F_{10} 各曲線の位置にある。現実のポートフォリオ価値とイミュニゼーション・ポートフォリオ価値が等しくなる点 A_{10} は，点 A_0 と同じく，年率12%の利子率水準上にある。トリッガー・ポイント T_{10} も，T_0 と同じ利子率水準上にある。I_{10}, F_{10} 各曲線がそれぞれ I_0, F_0 各曲線と異なっているのは，水平であるという点であり，これはイミュニゼーション・ポートフォリオおよび下限ポートフォリオの定義―投資計画期間が終わる時点において，それぞれイミュニゼーション収益率，下限収益率を，利子率がいかなる水準であれ，きっかり実現するポートフォリオ―からして当然のことである。図2の点 A_0, A_{10}, および点 T_0, T_{10} は，それぞれ図1の点 A, 点 T に対応している。

さて，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略にとって重要な指標となるトリッガー・イールド（y_t）の値は，次のようにして求められる。

＜収益率ターム＞

潜在的実現収益率 $\bar{r}_q$ と下限収益率 r_f を一致させる市場利子率水準 i_{t+1} が，トリッガー・イールド y_{t+1} だから，(1)と(6)式から，

$$(1+i_0-x)^q=(1+i_0)^t\frac{1}{\overline{V}}\sum_{\tau=t+1}^{n}c_\tau(1+y_{t+1})^{-\tau+t}(1+y_{t+1})^{q-t} \tag{26}$$

を解けば，トリッガー・イールド y_{t+1} の値が求まる。

＜価値ターム＞

投資計画終了時における現実のポートフォリオ価値 V_q と下限ポートフォリオ価値 F_q を一致させる市場利子率水準 i_{t+1} がトリッガー・イールド y_{t+1} である。(4)式と(13)式とから

$$V_t(1+i_{t+1})^{q-t}=F_t(1+i_{t+1})^{q-t} \tag{27}$$

$$V_t=F_t$$

これに，(3)式と(14)式を通用すると

$$(1+i_0)^t\sum_{\tau=t+1}^{n}c_\tau(1+y_{t+1})^{-\tau+t}=\frac{(1+r_f)^q}{(1+y_{t+1})^{q-t}}\overline{V}$$

となり，結局，(26) 式に帰着する。(27)式からわかるように，条件式 $V_q=F_q$ は $V_s=F_s$ ($s=t,\ t+1,\ \cdots,\ q-1,\ q$) と同値であるから，トリッガー・イールド y_{t+1} の値は，利子率変化以降の任意の時点における現実のポートフォリオ価値 V_s と下限ポートフォリオ価値 F_s との等号条件から求められることがわかる。

われわれの数値例においては，(26)式は

$$(1+0.06-0.005)^{10}$$
$$=(1+0.06)^0\left(\frac{1}{100}\right)\left[\left(\frac{6}{y_1}\right)\left\{1-\frac{1}{(1+y_1)^{60}}\right\}+\frac{100}{(1+y_1)^{60}}\right](1+y_1)^{10}$$

となり，$y_1 \fallingdotseq 0.068$ が求めるトリッガー・イールドである。

§4 コンティンジェント・イミュニゼーション戦略の動態経路

ポートフォリオ価値は時間の経過と共に増殖する。動態的過程の中でコンティンジェント・イミュニゼーション戦略がどのように実行されるかを見てみよう。

投資家は当初は利子率予想に基づき，ポートフォリオを積極的に運用する。将来利子率が上昇すると予想されれば，残存投資期間より短かいデュアレーションをもつようにポートフォリオを編成し，逆に，将来利子率下落が起こりそうであれば，残存投資期間より長いデュアレーションをもつポートフォリオを編成する。このような積極的運用が毎期成功すれば，投資家は投資計画期間終了時に当初約束された収益率（イミュニゼーション収益率）を大きく上回る実現収益率をあげることができる。たとえ利子率予想がはずれて，ポートフォリオ価値がわずかしか増殖しないあるいは減少することになっても，その時の潜在的実現収益率が下限収益率を超えている限りは，積極的運用戦略が継続される。しかし，利子率予想が何回かはずれて，その結果，潜在的実現収益率が下限収益率にまで低下する時，投資家は戦略を修正して，イミュニゼーション運用に切り換えなければならない。次の仮定を置く。

〔仮　定〕

①２種類の債券が存在する。債券Aは表面利率７％，残存期間５年，そして債券Bは表面利率９％，残存期間10年である。利払いは年２回で，利払い日はA，Bともに同日である。

②投資計画期間は５年である。投資家は利子率予想に基づき，債券A，Bのどちらかを保有する。イミュニゼーション運用に切り換えてからは，残存投資計画期間とデュアレーションが一致するように，債券A，Bの保有比率を調整してポートフォリオを構築する。

③クッション・スプレッドは100ベーシス・ポイントとする。下限収益率は年

率7％になる。
④当初（$t=0$）において，利子率の期間構造は年率8％の水準でフラットである。各期の初めに，利子率構造は上下に平行シフトする。

投資家は，当初（第0期の初め）8％の利子率水準の下で債券Aに投資するものとする。1期間が経過するごとにクーポン利子が支払われる。クーポン所得を得てから，投資家は次の期間の利子率変動を予想して，それに基づき債券Aを保有し続けるかそれとも債券Bに乗り換えるかを決める。その際の選択方針は，利子率上昇が予想される場合には，デュアレーションが残存投資計画期間より短かい債券Aを選び，逆に，利子率下落が予想される場合にはデュアレーションが残存投資計画期間より長い債券Bを選ぶということである。銘柄が

表4　利子率変動と債券価格の推移

t	利子率（年率）	債券A			債券B		
		残存期間	価格	デュアレーション	残存期間	価格	デュアレーション
0	8.0	10	95.94452	8.57309	20	106.79518	13.82062
1	9.0	9	92.73116	7.82235	19	100.00000	13.16000
2	9.5	8	91.83866	7.06865	18	97.01967	12.61728
3	8.0	7	96.99899	6.31631	17	106.08283	12.38929
4	7.0	6	100.00000	5.51510	16	112.09415	12.00552
5	7.5	5	98.87918	4.67094	15	108.48649	11.39362
6	6.0	4	101.85856	3.80369	14	116.94412	10.96643
7	7.0	3	100.00000	2.89964	13	110.30279	10.27639
8	6.5	2	100.47666	1.96620	12	112.25890	9.68838
9	8.5	1	99.28058	1.00000	11	102.16087	8.93838
10	10.0	0	100.00000	0.00000	10	96.13911	8.22869

（注）債券Aの表面利率は7％，債券Bの表面利率は9％。

債券A　$$P_{At}=\left(\frac{3.5}{i_t}\right)\left\{1-\frac{1}{(1+i_t)^{10-t}}\right\}+\frac{100}{(1+i_t)^{10-t}}$$

$$D_A(i_t)=\frac{1+i_t}{i_t}-\frac{1+i_t-(i_t-0.035)(10-t)}{0.035(1+i_t)^{10-t}+(i_t-0.035)}$$

債券B　$$P_{Bt}=\left(\frac{4.5}{i_t}\right)\left\{1-\frac{1}{(1+i_t)^{20-t}}\right\}+\frac{100}{(1+i_t)^{20-t}}$$

$$D_B(i_t)=\frac{1+i_t}{i_t}-\frac{1+i_t-(i_t-0.045)(10-t)}{0.045(1+i_t)^{20-t}+(i_t-0.045)}$$

表5　コンティンジェント・イミュニゼーションの動態過程とポートフォリオ価値の計算式

t	ポートフォリオ価値（期初）	ポートフォリオ価値(期末)	次期の利子率予想	次期の銘柄選択
0	$\overline{V}(i_0)=mP_{A0}=100$	$\overline{V}_0(i_0)=(1+i_0)\,\overline{V}(i_0)$	上昇	A
1	$V_0(i_1)=\dfrac{V_1(i_0)}{P_{A0}}P_{A1}=(1+i_0)mP_{A1}$	$V_1(i_1)=(1+i_1)\,V_0(i_1)$	上昇	A
2	$V_1(i_2)=\dfrac{V_2(i_1)}{P_{A1}}P_{A2}=(1+i_1)(1+i_0)mP_{A2}$	$V_2(i_2)=(1+i_2)\,V_1(i_2)$	下落	B
3	$V_2(i_3)=\dfrac{V_3(i_2)}{P_{B2}}P_{B3}=(1+i_2)(1+i_1)(1+i_0)\,m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)P_{B3}$	$V_3(i_3)=(1+i_3)\,V_2(i_3)$	下落	B
4	$V_3(i_4)=\dfrac{V_4(i_3)}{P_{B3}}P_{B4}=\prod_{\tau=0}^{3}(1+i_\tau)m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)P_{B4}$	$V_4(i_4)=(1+i_4)\,V_3(i_4)$	上昇	A
5	$V_4(i_5)=\dfrac{V_5(i_4)}{P_{A4}}P_{A5}=\prod_{\tau=0}^{4}(1+i_\tau)m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)\left(\dfrac{P_{B4}}{P_{A4}}\right)P_{A5}$	$V_5(i_5)=(1+i_5)\,V_4(i_5)$	下落	B
6	$V_5(i_6)=\dfrac{V_6(i_5)}{P_{B5}}P_{B6}=\prod_{\tau=0}^{5}(1+i_\tau)m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)\left(\dfrac{P_{B4}}{P_{A4}}\right)\left(\dfrac{P_{A5}}{P_{B5}}\right)P_{B6}$	$V_6(i_6)=(1+i_6)\,V_5(i_6)$	上昇	A
7	$V_6(i_7)=\dfrac{V_7(i_6)}{P_{A6}}P_{A7}=\prod_{\tau=0}^{6}(1+i_\tau)m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)\left(\dfrac{P_{B4}}{P_{A4}}\right)\left(\dfrac{P_{A5}}{P_{B5}}\right)\left(\dfrac{P_{B6}}{P_{A6}}\right)P_{A7}$	$V_7(i_7)=(1+i_7)\,V_6(i_7)$	下落	B
8	$V_7(i_8)=\dfrac{V_8(i_7)}{P_{B7}}P_{B8}=\prod_{\tau=0}^{7}(1+i_\tau)m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)\left(\dfrac{P_{B4}}{P_{A4}}\right)\left(\dfrac{P_{A5}}{P_{B5}}\right)\left(\dfrac{P_{B6}}{P_{A6}}\right)\left(\dfrac{P_{A7}}{P_{B7}}\right)P_{B8}$	$V_8(i_8)=(1+i_8)\,V_7(i_8)$	上昇	A
9	$V_8(i_9)=\dfrac{V_9(i_8)}{P_{A8}}P_{A9}=\prod_{\tau=0}^{8}(1+i_\tau)m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)\left(\dfrac{P_{B4}}{P_{A4}}\right)\left(\dfrac{P_{A5}}{P_{B5}}\right)\left(\dfrac{P_{B6}}{P_{A6}}\right)\left(\dfrac{P_{A7}}{P_{B7}}\right)\left(\dfrac{P_{B8}}{P_{A8}}\right)P_{A9}$	$V_9(i_9)=(1+i_9)\,V_8(i_9)$	上昇	A
10	$V_9(i_{10})=\dfrac{V_{10}(i_9)}{P_{A9}}P_{A10}=\prod_{\tau=0}^{9}(1+i_\tau)m\left(\dfrac{P_{A2}}{P_{B2}}\right)\left(\dfrac{P_{B4}}{P_{A4}}\right)\left(\dfrac{P_{A5}}{P_{B5}}\right)\left(\dfrac{P_{B6}}{P_{A6}}\right)\left(\dfrac{P_{A7}}{P_{B7}}\right)\left(\dfrac{P_{B8}}{P_{A8}}\right)P_{A10}$			

（注）m：100の投資資金で購入された債券Aの枚数。

選択され投資されてからすぐに（次期の初めに），利子率構造が新らしい水準にシフトする。この時，利子率予想が的中すれば，ポートフォリオ価値は増大するが，はずれた場合には，ポートフォリオ価値は減少する。いずれにしても，投資家はその期間中はポートフォリオを組み直すことはせず，その期の終わりにおいてクーポン利子が支払われてから，再び利子率を予想し，その利子率予想に基づき，ポートフォリオの再編成を行う。このような利子率予想一ポートフォリオ編成の反復過程が，投資計画期間中行われることになる。

表４は，利子率の期間構造が時間の経過と共に変化していく場合に，債券Ａ，Ｂの価格，残存期間，そしてデュアレーションがどのように移り変わっていくかを示したものである。P_{At}, $D_A(i_t)$ は債券Ａの第 t 期の期初におけるそれぞれ額面価値 100 あたりの価格，デュアレーション，P_{Bt}, $D_B(i_t)$ は債券Ｂの第 t 期の期初におけるそれぞれ額面価値100あたりの価格，デュアレーションを意味する。

表５は，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略において，投資家の利子率予想がすべて的中した場合に，投資家が選択する銘柄，ポートフォリオの各期初および各期末における価値の計算式を示した一覧表である。表６は，この計算式に基づいて，現実のポートフォリオ価値および潜在的実現収益率，

表６　コンティンジェント・イミュニゼーションの動態経路

t	i_t	$q-t$	$D(i_t)$	$V_{t-1}(i_t)$	$V_t(i_t)$	F_t	$\bar{r}_{10}$	r_f
0	8.0	10	8.573	100.000	104.000	95.295	8.000	7.000
1	9.0	9	7.822	100.517	105.040	94.920	8.190	7.000
2	9.5	8	7.069	104.029	108.971	101.110	8.386	7.000
3	8.0	7	12.389	119.150	123.916	107.194	9.200	7.000
4	7.0	6	12.006	130.938	135.521	114.752	9.750	7.000
5	7.5	5	4.671	134.002	139.027	120.214	9.766	7.000
6	6.0	4	10.966	149.865	154.361	125.330	10.734	7.000
7	7.0	3	2.899	151.544	156.849	127.228	10.652	7.000
8	6.5	2	9.688	159.630	164.818	132.319	10.920	7.000
9	8.5	1	1.000	162.856	169.777	135.309	10.872	7.000
10	10.0	0	0.000	171.008	179.558	141.060	11.024	7.000

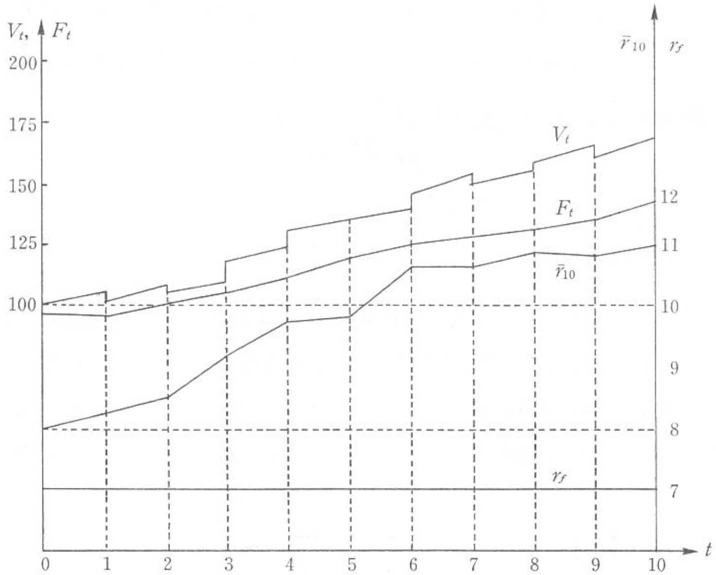

図 3　コンティンジェント・イミュニゼーション戦略（成功例）

下限ポートフォリオ価値，ポートフォリオ・デュアレーションがどのような時間的推移をたどるかを計算して出したものである。

図3は，この成功的なコンティンジェント・イミュニゼーション戦略の結果を，ポートフォリオの価値タームと収益率タームの両方で図示したものである。

§ 5　トリッガー・イールド等高線

コンティンジェント・イミュニゼーション戦略にとって非常に重要な概念の一つがトリッガー・イールドである。この戦略を成功させ得るか否かの分水嶺は，トリッガー・イールドを絶えずモニタリングして，最悪でも下限収益率を確実に達成できるかどうかという点であるといっても過言ではない。トリッガー・イールド等高線について説明する。

表面利率 r_c, 最終利回り（市場利子率） i, そして残存期間 n の債券で構成されるポートフォリオのデュアレーション D は，次の式で定義される[13]。

$$D=D(r_c,\ i,\ n)=\sum_{t=1}^{n} t\left\{\frac{c_t(1+i)^{-t}}{\sum_{t=1}^{n} c_t(1+i)^{-t}}\right\} \tag{28}$$

この式は以下のように変形される[14]。

$$D=D(r_c,\ i,\ n)=\frac{1+i}{i}-\frac{(1+i)-(i-r_c)n}{r_c(1+i)^n+(i-r_c)} \tag{29}$$

トリッガー・イールド y_{t+1} は，潜在的実現収益率 $\bar{r}_q$ と下限収益率 r_f を等しくする利子率水準 i_{t+1} であるから，図1からたやすく読みとれるように，潜在的実現収益率曲線の形状がトリッガー・イールドの値を決める主要な要因である。潜在的実現収益率曲線の形状に関して，以下のことが成り立つ[15]。な

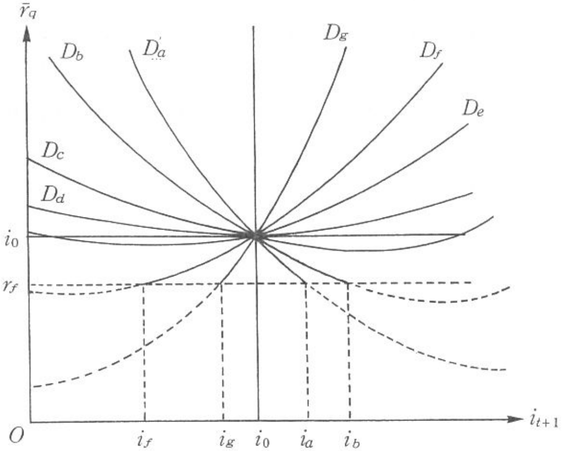

図4　潜在的実現収益率曲線の形状

13）Macaulay〔10〕, p. 48. このデュアレーションの定義は利子率の期間構造がフラットを前提としており，「マッコーレー型デュアレーション（Macaulay Duration）」と呼ばれる。

14）拙稿〔13〕を参照せよ。

15）詳しい内容および証明については，拙稿〔14〕を参照せよ。そこでは $t=0$ の場合を想定しているが，$t\neq0$ の場合においても成立することは，証明の手順を見れば明らかである。

お，図4において，$q-t$ は一定に保たれており，7つの相異なるデュアレーション $D(i_0)$ をもつポートフォリオの各々に対して，潜在的実現収益率曲線が描かれている。7つのポートフォリオ・デュアレーションの間の大小関係は次のようになる。

$$D_a(i_0)>D_b(i_0)>D_c(i_0)>D_d(i_0)=q-t>D_e(i_0)>D_f(i_0)>D_g(i_0)$$

＜イ＞ $q-t<D(i_0)$ の時，潜在的実現収益率曲線は右下がりであり，$q-t$ と $D(i_0)$ との格差が大きい程，傾斜は急である。

＜ロ＞$q-t=D(i_0)$ の時，潜在的実現収益率曲線は，$i_{t+1}=i_0$ で最小値をとる凸関数である。

＜ハ＞$q-t>D(i_0)$ の時，潜在的実現収益率曲線は右上がりであり，$q-t$ と $D(i_0)$ との格差が大きい程，傾斜は急になる[16]。

この結果を踏まえて，所与の残存投資期間に対して，ポートフォリオ・デュ

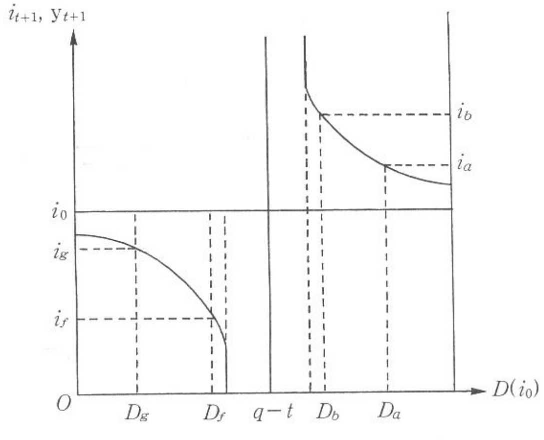

図5　トリッガー・イールド等高線

16）ポートフォリオ・デュアレーション $D(i_0)$ は変化前の利子率水準 i_0 で計算されていることに注意する必要がある。厳密に述べると，潜在的実現収益率曲線は単調な減少関数でもなければ，単調な増加関数でもない。ある利子率水準―その水準で最小値をとる―を転換点として，それを境に向きが逆転する。詳しくは拙稿〔14〕の「§4ポートフォリオ価値の最小値とイミュニゼーション定理」を参照されたい。

アレーションとトリッガー・イールドとの関数関係のグラフ，もしくは所与のポートフォリオ・デュアレーションに対して，残存投資計画期間とトリッガー・イールドとの関数関係のグラフを描くことができる。

(A)残存投資計画期間を所与として，ポートフォリオ・デュアレーションとトリッガー・イールドとの関数関係のグラフ―トリッガー・イールド等高線（trigger yield contours）と呼ばれる―を描くと，図5のようになる。

(B)ポートフォリオ・デュアレーションを所与として，残存投資計画期間とトリッガー・イールドとの関数関係のグラフを描くと，図6のようになる[17)]。

ⓐ，ⓑのいずれが投資家にとって使い勝手がいいかと言うと，それはⓐであることは明らかであろう。トリッガー・イールド等高線という場合，通普はⓐのデュアレーションとトリッガー・イールドとの関係を表わしたグラフを指

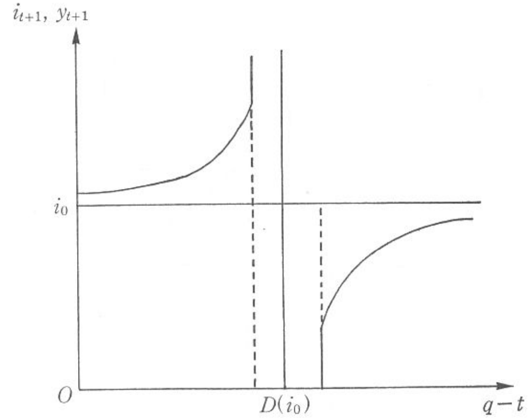

図6　トリッガー・イールド等高線

17）トリッガー・イールド等高線は，ポートフォリオ・デュアレーションの代わりにポートフォリオの残存期間 n を採用して描くこともできる。しかし，残存期間よりもデュアレーションを用いたトリッガー・イールド等高線が分析上目的にかなっている。それは，同じデュアレーションをもつポートフォリオは，利子率変化が小さければ，ほぼ同じ価格変動性を示すから，トリッガー・イールドの値もほぼ等しくなるからである。

す。

トリッガー・イールド等高線は次のような特徴をもつ。

①トリッガー・イールド等高線は2つの部分に分割される。分割軸は，残存投資計画期間 $q-t$ と当初における利子率の期間構造 i_0 である。

ⓐ残存投資計画期間より長いデュアレーションをもつポートフォリオ（$q-t<D(i_0)$）の場合，トリッガー・イールド等高線は分割軸の右上方にある。

ⓑ残存投資計画期間より短かいデュアレーションをもつポートフォリオ（$q-t>D(i_0)$）の場合，トリッガー・イールド等高線は分割軸の左下方にある。

② 2つのトリッガー・イールド等高線に挟まれた空間は，投資家が積極的運用を実行できる利子率領域である。ポートフォリオ・デュアレーションと残存投資計画期間との格差が小さい程，積極的運用を実行できる利子率領域は広くなる。実際，その格差がある限度内にあれば，利子率変動がいかなる大きさであっても，潜在的実現収益率は決して下限収益率を下回ることはなく，それ故，トリッガー・イールドは存在しない。

③ 2つの分割軸によって分けられる4つの平面において，潜在的実現収益率の値の大小関係を矢印を使って表したものが図7である。

(i)　$D(i)>q-t$ の領域では，下へ行く程潜在的実現収益率の値は大きく，

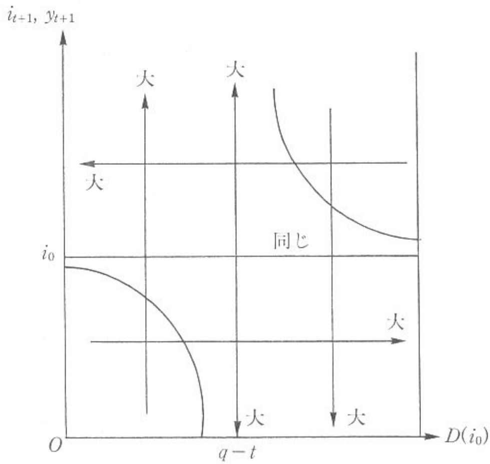

図7　トリッガー・イールド等高線と潜在的実現収益率

逆に，$D(i_0)<q-t$ の領域では上に行く程潜在的実現収益率の値は大きい。$D(i_0)=q-t$ においては，当初の約束された収益率 i_0 を境にして，その上方の領域では上に行く程，そしてその下方の領域では下に行く程，潜在的実現収益率は大きい。

(ii)　$i_{t+1}>i_0$ の領域では，左へ行く程潜在的実現収益率は大きく，逆に，$i_{t+1}<i_0$ の領域では右へ行く程潜在的実現収益率は大きい。$i_{t+1}=i_0$ においては，どこにおいても潜在的実現収益率は i_0 で等しい。

④トリッガー・イールド等高線の形状はポートフォリオの特性を反映している。同じデュアレーションをもつポートフォリオであっても，キャッシュ・フローのパターンや残存期間が異なれば，トリッガー・イールドの値は異なる。

⑤投資家がポートフォリオを自由にかつ積極的に運用できる利子率領域の大きさは，投資家が設定したクッション・スプレッドの大きさに依存する。クッション・スプレッドが大きい程，トリッガー・イールド等高線は2つの分割軸から遠ざかり，投資家にとっての自由裁量領域は拡大する。逆に，クッション・スプレッドが小さくなるにつれて，トリッガー・イールド高等線は2つの分割軸に接近し，クッション・スプレッドがゼロの時，分割軸と重なる（図8参

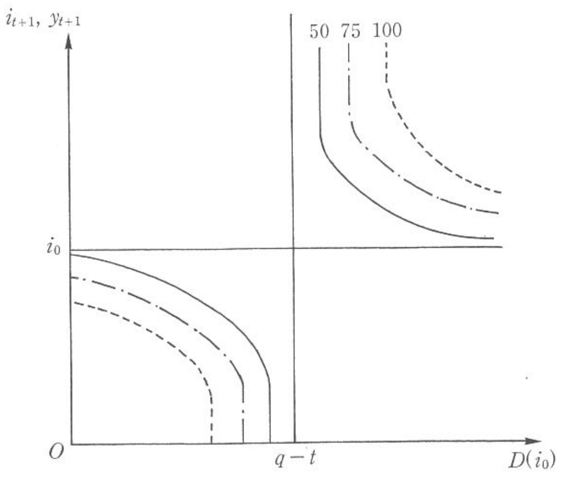

図8　クッション・スプレッドとトリッガー・イールド等高線

表 7　利子率変動と潜在的実現収益率（残存期間別）　（単位%）

$n/2$ / $D(i_0)/2$ / $2i_1(\%)$	∞	50	30	20	15	12	10	8	7.163	6	5	3	1	0.5	0.1	0
	8.833	8.807	8.566	7.975	7.295	6.652	6.079	5.356	5.000	4.443	3.901	2.606	0.972	0.500	0.100	0.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7.000	18.464	18.170	17.280	16.048	14.980	14.106	13.390	12.542	12.140	11.528	10.948	9.604	7.962	7.494	7.102	7.000
8.000	16.606	16.464	15.910	15.054	14.270	13.610	13.062	12.404	12.090	11.608	11.150	10.084	8.772	8.396	8.080	8.000
9.000	15.100	15.034	14.714	14.156	13.618	13.152	12.760	12.280	12.050	11.696	11.358	10.564	9.580	9.298	9.060	9.000
10.000	13.864	13.836	13.672	13.352	13.024	12.732	12.480	12.172	12.022	11.790	11.568	11.042	10.388	10.200	10.040	10.000
11.000	12.844	12.836	12.774	12.634	12.486	12.348	12.228	12.078	12.006	11.892	11.782	11.522	11.194	11.100	11.020	11.000
12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000
13.000	11.302	11.306	11.342	11.444	11.566	11.688	11.796	12.114	12.006	12.114	12.222	12.478	12.806	12.900	12.980	13.000
14.000	10.726	10.730	10.786	10.960	11.184	11.408	11.619	12.236	12.022	12.236	12.448	12.958	13.610	13.800	13.958	14.000
15.000	10.256	10.260	10.324	10.546	10.848	11.164	11.462	12.364	12.050	12.364	12.676	13.436	14.414	14.698	14.938	15.000
16.000	9.874	9.878	9.944	10.222	10.560	10.952	11.330	12.500	12.090	12.500	12.910	13.914	15.216	15.596	15.918	16.000
17.000	9.572	9.574	9.638	9.904	10.316	10.772	11.220	12.642	12.140	12.642	13.146	14.394	16.020	16.494	16.896	17.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2y_1$	13.500	13.510	13.848	13.983	14.530	15.781	—	—	—	—	7.164	9.920	10.758	10.875	10.978	11.000

照)。

数値例に基づき，実際にトリッガー・イールド等高線を描いてみよう。

<数値例2>

表面利率12%，最終利回り12%のパー債券に全額投資する。残存期間は無限大からゼロまでいくつかを想定している。投資計画期間は10期間（5年）である。債券購入直後に，利子率構造がシフトする。

表7は，残存期間別に利子率構造のシフトと潜在的実現収益率との関係を一覧表に 表したものであり，トリッガー・イールドの値も算出して掲載している。

図9は，表7を参考にして，横軸に当初のポートフォリオ・デュアレーション（年数），縦軸にトリッガー・イールド（年率）を採って，トリッガー・イールド等高線を描いたものである。

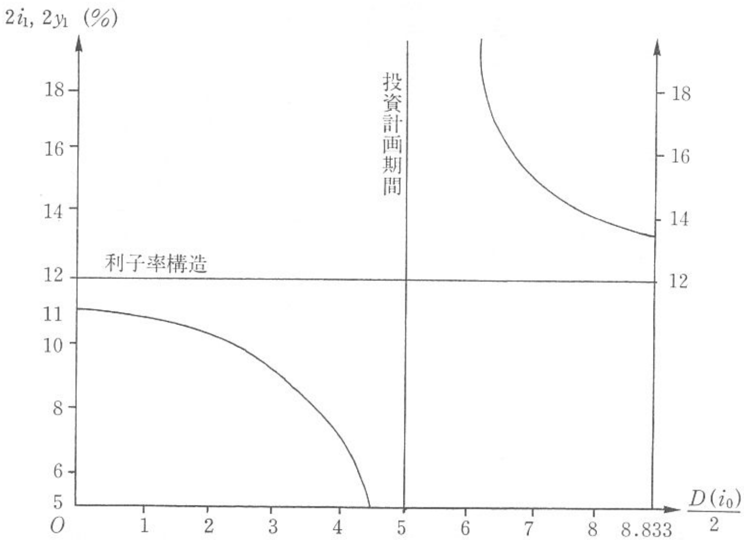

図9　トリッガー・イールド等高線（数値例）

§ 6　運用戦略における伸縮性

伝統的なイミュニゼーション戦略においては，当初約束された収益率を実現できるが，ポートフォリオ運用上の自由裁量（柔軟性）の余地は極めて限られている。逆に，利子率予想に基づく積極的投資戦略においては，投資家はポートフォリオ運用において広範な自由裁量権を持っているが，利子率リスクによる収益率低下の恐れに曝されている。コンティンジェント・イミュニゼーション戦略は，運用面での自由裁量をある程度犠牲にして，利子率リスクに対するセーフティ・ネットを張ろうとするものである。あるいは，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略は，実現収益率の当初約束された収益率水準からのある程度の下落のリスクを甘受する代わりに，ポートフォリオ運用に柔軟性を導入するものである，と言うこともできる。この意味において，ポートフォリオ運用における柔軟性と当初約束された収益率水準からの実現収益率の低下のリスクはトレード・オフ関係にある[18]。

コンティンジェント・イミュニゼーション戦略におけるより一層大きな柔軟性は，次の３つの手段によって導入することができる。ⓐポートフォリオ・デュアレーションの長さをできる限り投資計画期間の長さに近づける。ⓑクッション・スプレッドをできる限り大きく採る。ⓒ投資計画期間を固定しないで，幅をもたせる。前２者については既に触れているので，この節ではⓒについて検討する。

投資計画期間が最短で q_1 期間，最長で q_2 期間であるとしよう。１つの投資計画期間に対して１対のトリッガー・イールド等高線が存在するから，このように柔軟性のある投資計画の場合には，論理上は無数のペアのトリッガー・イールド等高線が存在することになる。それらの中で最も右上方に位置するのは，最長の投資計画期間 q_2 に対応するものであり，逆に，最も左下方に位置

18）このトレード・オフ関係は予想収益率とリスクとのトレード・オフ関係に帰着される。というのは，投資家が運用における柔軟性を求めるのは，（主観的な）予想実現収益率が当初約束された収益率より大きいからである。

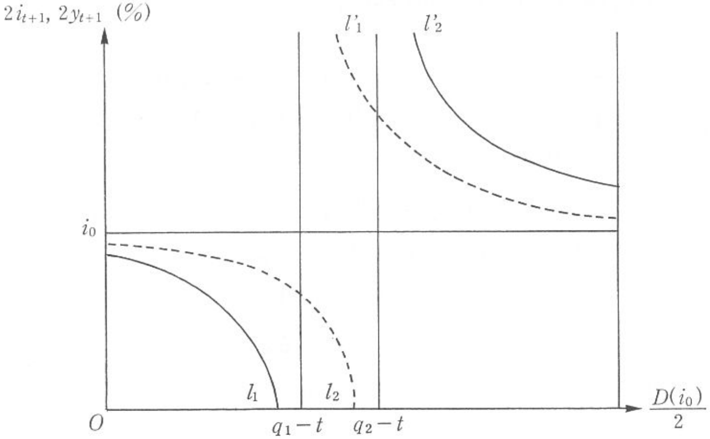

図10　柔軟な投資計画期間とトリッガー・イールド等高線

するものは最短の投資計画期間 q_1 に対応するものである。図10においては，q_2 に対応するトリッガー・イールド等高線は l_2, l_2' であり，q_1 に対応するトリッガー・イールド等高線は l_1, l_1' である。他のすべてのトリッガー・イールド等高線は l_1 と l_2, l_1' と l_2' の間に位置している。このことは，コンティンジェント・イミュニゼーション戦略の観点からは，分割軸から最も遠くに位置する1対のトリッガー・イールド等高線 l_1 と l_2' が，柔軟性のある投資計画期間にとって関連するトリッガー・イールド等高線だということを意味する。

＜数値例3＞

数値例2と同じ条件で，投資計画期間だけを変える。すなわち，投資計画期間を10期間に固定せず，8期間～12期間と幅をもたせる。

表8は，8期間～12期間の伸縮的な投資計画のもとで，潜在的実現収益率を利子率別，残存期間別に計算して一覧表にしたものである。潜在的実現収益率の値は投資計画期間の長さによって異なる。表では，ポートフォリオ・デュアレーションが12期間を超えるかあるいは等しい時には，投資計画期間を12期間

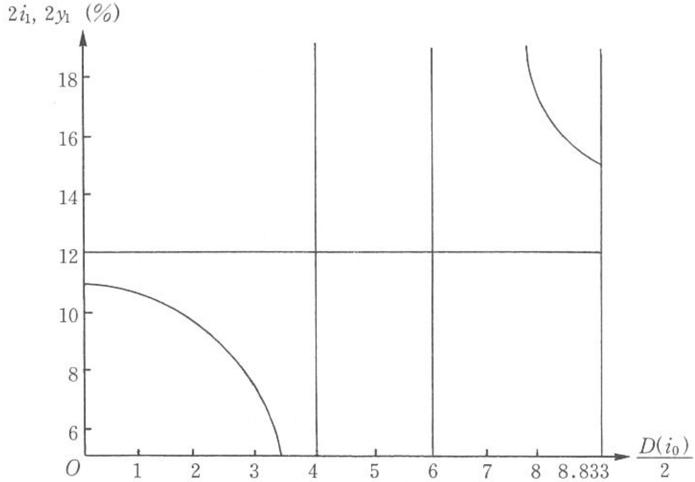

図11　伸縮的な投資計画期間とトリッガー・イールド等高線（数値例）

として潜在的実現収益率を計算しており，逆に，ポートフォリオ・デュアレーションが８期間に満たない，あるいは等しい時には，投資計画期間を８期間として潜在的実現収益率を計算している。10期間のデュアレーションを有するポートフォリオの潜在的実現収益率は，10期間の投資計画を仮定して計算されている。

図11は，表８の結果をグラフに表したものである。投資計画が10期間と固定されている場合のトリッガー・イールド等高線（図９）と比較してみると，投資家にとって自由裁量の余地がどれ程拡大したか一目瞭然である。

§７　モニタリング過程—おわりに—

実際にコンティンジェント・イミュニゼーション戦略を実行するにあたって，それが成功するか否かはモニタリングの過程にかかっている。積極的運用

表8　伸縮的な投資計画

$n/2$	∞	50	30	20	15	12	10	9.757
$D(i_0)/2$	8.833	8.807	8.566	7.975	7.295	6.652	6.079	6.000
$2i_1(\%)$								
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7.000	16.510	16.268	15.532	14.512	13.630	12.904	12.312	12.232
8.000	15.148	15.030	14.572	13.862	13.212	12.664	12.210	12.148
9.000	14.070	14.016	13.750	13.288	12.842	12.454	12.128	12.084
10.000	13.214	13.192	13.056	12.790	12.518	12.274	12.066	12.036
11.000	12.536	12.528	12.476	12.362	12.238	12.122	12.022	12.010
12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000
13.000	11.584	11.586	11.618	11.702	11.804	11.906	11.996	12.010
14.000	11.268	11.272	11.320	11.464	11.650	11.838	12.012	12.036
15.000	11.038	11.042	11.096	11.280	11.534	11.798	12.046	12.082
16.000	10.884	10.886	10.942	11.152	11.456	11.786	12.100	12.146
17.000	10.792	10.794	10.846	11.070	11.414	11.798	12.172	12.226
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2y_1$	15.210	15.250	15.568	—	—	—	—	—

（注）（i）$\dfrac{D(i_0)}{2} \geqq 6$の時，$\bar{r}_q=\bar{r}_{12}$。　(ii) $\dfrac{D(i_0)}{2}=5$の時，$\bar{r}_q=\bar{r}_{10}$。

が順調にいき，セーフティ・マージンが時間の経過につれて拡大している限りにおいてはポートフォリオ運用に問題はないが，逆に，利子率構造が予想と反対の方向へ変動し続ける場合には，セーフティ・マージンが次第に侵食されていくので，積極的運用からイミュニゼーション運用へと運用方針を切り換える必要が生じてくる。ここで肝要なことは，少なくとも下限収益率は100％確実に達成できるということである。ポートフォリオ運用の動態過程においてモニタリングが重要なのは，積極的運用からイミュニゼーション運用への切り換えには様々な困難がつきまとうことが予想されるからである。投資家は市場利子率がトリッガー・イールドに達する前に，イミュニゼーション運用への切り換えに向けて十分な警戒と準備を行う必要がある。その警戒と準備への発端となる利子率水準は「トリッガー・アラート利回り（trigger-alert yield)」と呼

期間と潜在的実現収益率　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（単位%）

7.163	5.175	5	4	3	2	1	0.5	0.1	0
5.000	4.000	3.901	3.291	2.606	1.837	0.972	0.500	0.100	0.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12.140	12.078	11.946	11.144	10.262	9.286	8.204	7.618	7.126	7.000
12.090	12.050	11.946	11.310	10.608	9.830	8.964	8.496	8.102	8.000
12.050	12.028	11.950	11.480	10.956	10.374	9.724	9.372	9.076	9.000
12.022	12.012	11.962	11.650	11.304	10.916	10.484	10.248	10.050	10.000
12.006	12.004	11.978	11.824	11.652	11.458	11.242	11.124	11.026	11.000
12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000
12.006	12.004	12.028	12.178	12.348	12.540	12.756	12.874	12.974	13.000
12.022	12.012	12.060	12.360	12.698	13.080	13.512	13.748	13.948	14.000
12.050	12.028	12.100	12.542	13.046	13.620	14.268	14.622	14.922	15.000
12.090	12.050	12.144	12.728	13.396	14.158	15.022	15.496	15.896	16.000
12.140	12.078	12.194	12.916	13.746	14.694	15.774	16.368	16.870	17.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
—	—	—	6.120	9.110	10.159	10.678	10.857	10.970	11.000

(iii) $\frac{D(i_0)}{2} \leqq 4$の時，$\bar{r}_q = \bar{r}_8$。

ばれる[19]。トリッガー・アラート利回りをどのようにしてどの位の大きさに決めるかは，投資家の判断に委ねられる。図12は，トリッガー・アラート利回り格差（trigger-alert yield spread)—トリッガー・イールドとトリッガー・アラート利回りとの格差—を一定とした場合のトリッガー・アラート利回り等高線が描かれている。

モニタリング過程およびトリッガー・アラート利回りの決定において，考慮すべき要因に以下のものがある。

①市場の拡がりと厚み　　イミュニゼーション運用への転換にあたって銘柄の入替え売買が行われるが，その際，市場が十分な拡がりと厚みを持っていることが要求される。さもなければ，速やな入替えが不可能になったり，価格の

19) Leibowitz and Weinberger〔8〕, p. 26 を参照せよ。

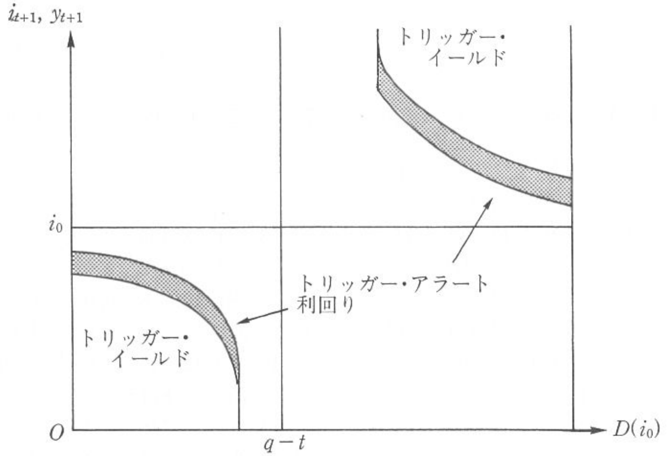

図12　トリッガー・アラート利回り等高線

異常な高騰を誘発し予想外の損失を蒙ったりする可能性があるため，下限収益率を維持できない恐れがでてくる。

②ポートフォリオの流動性構造　　ポートフォリオを構成する銘柄の少なくとも一部は流動的でなければならない。イミュニゼーション運用への移行に際しては，少なくとも一部の銘柄を売却する必要に迫られるが，移行を容易かつ敏速に行うためには，流動性の大きい資産をポートフォリオの構成銘柄として組み込んでおくことが要請される。すべての構成銘柄が大きい流動性を有する必要はない。

③市場の情況　　利子率構造の変化が激しい時期であるか，それとも利子率構造が安定している時期であるかということは，妥当なトリッガー・アラート利回り格差の大きさを決める上で極めて重要な要因である。利子率構造が不安定で変動が激しい時期には，早めに「警戒かつ準備」を実施しなければならない。

④モニタリングを実施する頻度と密度　　モニタリングの実施方法にはいくつかのパターンが考えられる。セーフティ・マージンが大きい時には，モニタリングの一定期間内の回数を残らし，そして普通の検査で済ませるが，利子率

水準がトリッガー・アラート利回りに到達したら，モニタリングの頻度を高めかつ検査も綿密に行うのが一般的な方法であろう。逆に，モニタリングの頻度と密度が高ければ，より敏速にかつ確実にイミュニゼーション運用への換転が可能であるから，トリッガー・アラート利回り格差をそれだけ小さくすることができよう。

⑤モニタリングに伴う費用　　下限収益率の設定はこの費用を考慮して行われる必要がある。

参 考 文 献

〔1〕 Bierwag, Gerald O., "Contingent Immunization," in his *Duration Analysis: Managing Interest Rate Risk* (Cambridge Mass.: Ballinger Publishing Co.,) 1987, 137-50.

〔2〕 ——, George G., Kaufman and Alden L. Toevs, "Recent Developments in Bond Portfolio Immunization strategies, " in〔3〕, 105-157.

〔3〕 ———————— (eds.), *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization* (Greenwich, Conn.: JAI Press) 1983.

〔4〕 Fabozzi, Frank J., *Fixed Income Mathematics* (Chicago: Probus Publishing Co.) 1988. 土田宏（監訳）『債券投資・ディーリングのための金融数学』金融財政事情研究会　1990年2月。

〔5〕 Fong, H. Gifford,「ポートフォリオの構築：確実利付証券」，〔11〕の第9章（訳本(上)の341-432ページ)。

〔6〕 —— and Frank J. Fabozzi, *Fixed Income Portfolio Management* (Homewood Ill.: Dow Jones-Irwin) 1985. 大澤和人（編訳）『債券ポートフォリオの基礎と戦略』東洋経済新報社，昭和63年6月，特に第6章「イミュナイゼーションとキャッシュ・フロー・マッチング戦略」(訳本114〜164ページ)。

〔7〕 Leibowitz, Martin L. and Alfred Weinberger, "The Uses of Contingent Immunization," *Journal of Portfolio Management* 8 (1), Fall 1981, 151-55.

〔8〕 ————————, "Contingent Immunization, Part 1: Risk Control Procedures," *Financial Analysts Journal* 38 (6), Nov.-Dec. 1982, 17-32.

〔9〕 ————————, "ContingentI mmunization, Part II: Problem Areas," *Financial Analysts Journal* 39 (1), Jan.-Feb. 1983, 35-50.

〔10〕 Macaulay, Frederick R., *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856* (New York: National Bureau of Economic Research) 1938.

〔11〕 Maginn, John L. and Donald L. Tuttle (eds.), *Managing Investment Portfolio: A Dynamic Process* (Boston: Warren, Gorham & Lamont) 1983. 青山護（監訳）『ポートフォリオ・マネジメントの実際』（上・下）東洋経済新報社 1989年。

〔12〕 Toevs, Alden L., "Uses of Duration Analysis for the Control of Interest Rate Risk," in Robert B. Platt (ed.), *Controlling Inteterst Rate Risk* (New York: John Wiley & Sons) 1986, Chap. 3, 28-61.

〔13〕 土橋敏光「デュアレーションの意味と性質」『研究年報』（大阪経済法科大学経済学研究所）(8), 1989年11月, 27-38。

〔14〕 ——「債券ポートフォリオとイミュニゼーション戦略」『研究年報』（大阪経済法科大学経済学研究所）(10), 1991年9月（予定）。