＜研究ノート＞

債券投資と価格変動リスク

土　橋　敏　光

1　序――債券投資とリスク――

債券投資における収益は償還以前は言うに及ばず，満期償還時点においてさえ確定していない。これは債券価格やクーポン収入の再投資レートが日々変化するからである。そのため債券収益の評価尺度である「利回り」指標もいくつかあり，それぞれが目的に合わせて使用されているのが現状である[1]　例外は受取りキャッシュ・フローが1回限りの債券―つまり，割引債およびクーポン利払いが残り1回限りの利付債[2]―で，この場合には満期償還日における最終利回りは事後的に実現する収益率と一致する。なんとなれば，その場合には，債券の償還価格は確定しており，かつクーポンの再投資はないからである。

債券の投資収益率が事前には不確定だということは，換言すれば，債券投資にはリスクが付随するということである。リスクは収益率と並んで投資の主要

1)　債券利回り諸指標の内容，相互比較そして欠点については拙稿〔3〕を参照されたい。

2)　利払い日と償還日は普通一致するが，数日間ズレることもある。

な決定要因である。本稿では債券投資のリスク，特に価格変動リスク，について分析を行なう。

2　リスクの種類

債券投資に伴なうリスクを発生原因別に分けると次のようになる。

(1)　債務不履行リスク[3)]

(2)　途中償還リスク ＜ 抽選償還リスク / 繰上げ償還リスク

(3)　金利変動リスク[4)] ＜ 価格変動リスク / 再投資リスク

(4)　残存期間短縮に伴う価格変動リスク

【1】　債務不履行リスク

わが国の債券で債務不履行に陥った例はほとんどない。また，債券発行に際しては「有担保原則」があるため，それ程問題になることはない。最近の金融自由化の過程の中で，債券発行基準が緩和され有担保原則が崩れつつある。それに対処する施策として，格付け機関による格付け評価が行なわれるようになった[5)]。アメリカにおけるスタンダード・アンド・プアズ社（Standard & Poor's），ムーディーズ社（Moody's）そしてダフ・アンド・フェルプス社（Duff & Phelps）は世界的に有名な格付け機関である。ただ，わが国においても発行体の異なる2種類の債券（例えば，国債と地方債）は，同一残存期間，同一クーポン・レートであっても，格差をもって利回り形成がなされている。これは発行体間の信用度（creditworthiness）等の違いを反映したものである。

3)　貸倒れリスク（default risk），信用リスク（credit risk）とも呼ばれる。

4)　市場リスク（market risk），金利リスク（interest rate risk）とも呼ばれる。

5)　日本公社債研究所，日本格付研究所，日本インベスターズサービスがある。

【2】 途中償還リスク

満期途中で償還される可能性のある債券は，予め償還される銘柄の記番号と日付が確定しているもの（均等償還債）を除き，新たなリスクを投資家にもたらす。抽選償還であれ繰上げ償還であれ償還時点における債券の時価より償還価格が低い場合には，その差額は投資家にとって資本損失である。償還価格がたとえ取得価格を上回っており償還差益が得られたとしても，また時価と償還価格との差額は投資家が実際に費用として負担するわけではないのだが，もし償還されずに時価で売却したら得られたであろう資本利益を逸失したという意味において機会費用なのである。逆に，時価が償還価格を下回っておれば，投資家はその差額を資本利得として受け取る。途中償還リスクを回避するためには，投資期間を短かくして途中償還可能日以前にその債券を売却するしかない。

【3】 金利変動リスク

これは2つに区別できる。すなわち，

① 価格変動リスク

② 再投資リスク

の2つである。

価格変動リスクとは金利変化に伴なう債券価格の変動によって資本損失を蒙る危険であり，また再投資リスクとは金利変動によってクーポン収入の再投資による孫利息が減少する危険である。価格変動リスクは価格変動率によって測ることができる。

【4】 価格変動リスクの2つの源泉

債券価格（P）は表面利率（r_c），償還価格（$\overline{P}$）残存期間（n）そして最終利回り（r）の関数として表わすことができる。

$$P=(r,\ r_c,\ n,\ \overline{P}) \tag{1}$$

表面利率（r_c）と償還価格（$\overline{P}$）は発行時に確定するから，結局

$$P=P(r, n) \tag{2}$$

となる。(2)式より

$$dp=\frac{\partial P}{\partial r}dr+\frac{\partial P}{\partial n}dn \tag{3}$$

すなわち，債券価格の変動（資本損益の発生）は①最終利回りの変化に対応するもの（右辺第１項），②残存期間の短縮化に起因するもの（右辺第２項），の２つに区別することができるのである。債券価格の変動に伴なうリスクも，それ故，

表１　残存期間別・最終利回り別の債券価格

r＼n	20	17	15	14	13	12	11	10	9
0.11	81.25	82.23	83.02	83.46	83.95	84.48	85.07	85.71	86.53
0.10	86.67	87.41	88.00	88.33	88.70	89.09	89.52	90.00	90.53
0.09	92.86	93.28	93.62	93.81	94.01	94.23	94.47	94.74	95.03
0.08	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
0.07	108.33	107.76	107.32	107.07	106.81	106.52	106.21	105.88	105.52
0.06	118.18	116.83	115.79	115.22	114.61	113.95	113.25	112.50	111.19
0.05	130.00	127.57	125.71	124.71	123.64	122.50	121.29	120.00	118.62

（単位　円）

r＼n	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0.11	87.23	88.14	89.16	90.32	91.67	93.23	95.08	97.30	100
0.10	91.11	91.76	92.50	93.33	94.29	95.38	96.67	98.18	100
0.09	95.35	95.71	96.10	96.55	97.06	97.64	98.31	99.08	100
0.08	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100
0.07	105.13	104.70	104.23	103.70	103.13	102.48	101.75	100.93	100
0.06	110.81	109.86	108.82	107.69	106.45	105.08	103.57	101.89	100
0.05	117.14	115.56	113.85	112.00	110.00	107.83	105.45	102.86	100

（注）表面利率８％，償還価格100.

＜イ＞ 最終利回り変動に対応する価格変動リスク

＜ロ＞ 残存期間短縮に起因する価格変動リスク

と呼んで区別することにしよう。＜イ＞の場合の資本損益は「市場資本損益（market capital gain (or loss)」，＜ロ＞の場合のそれは「蓄積資本損益（accumulated capital gain (or loss)」と呼ばれる。

数値例を掲げて具体的に説明しよう。表1は，8％クーポン債を例にとって，残存期間別・最終利回り別の債券価格を示したものである。

表1を基にして最終利回り水準別に残存期間と価格との関係を図示したのが図1である。この曲線は「等利回り価格曲線」と呼ばれる。図1から次のことがわかる。

オーバーパー債は最終利回りに変化がなければ，残存期間が短かくなるにしたがって価格が低下し，償還時点において丁度償還価格（100）に等しくなる。逆に，アンダーパー債は残存期間が短かくなるにつれて価格が上昇し，償還時

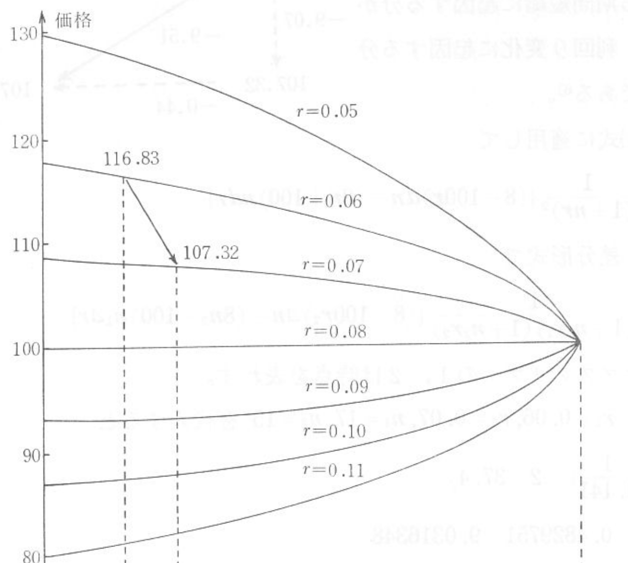


図1 等利回り価格曲線

点で丁度償還価格（100）に等しくなる。そして，パー債の場合は残存期間に関係なく，常に償還価格に等しい。

以上をまとめて言うと，「最終利回りに変化がなければ，オーバーパー債でもアンダーパー債でも残存年数が短かくなるにつれて，債券価格は償還価格に収束する。」これは，債券価格と最終利回り（単利）との関係式

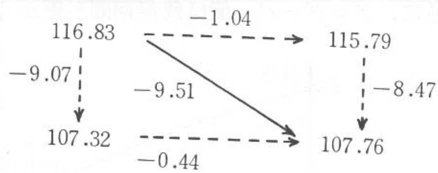
$$P=\frac{\bar{P}+100r_c n}{1+nr} \tag{4}$$

において

$$\lim_{n\to 0} P=\bar{P} \tag{5}$$

となることからわかる。

さて，8％クーポン債（17年物）の最終利回りが6％から2年後に7％へ上昇したとしよう。この時債券価格は116.83円から107.32円へ下がり，9.51円の資本損失が発生した。9.51円の資本損失のうち期間短縮に起因する分が0.44円で，利回り変化に起因する分が9.07円である6)。



(3)式を(4)式に適用して

$$dP=\frac{1}{(1+nr)^2}\{(8-100r)dn-(8n+100)ndr\} \tag{6}$$

あるいは，差分形式で

$$\Delta P=\frac{1}{(1+n_1r_1)(1+n_2r_2)}\{(8-100r_2)\Delta n-(8n_2+100)n_1\Delta r\} \tag{6$'$}$$

となる。サブスクリプトの1，2は時点を表わす。

(6)′式に，$r_1=0.06, r_2=0.07, n_1=17, n_2=15$ を代入すると

$$\Delta P=\frac{1}{4.141}(-2-37.4)$$

$$=-0.4829751-9.0316348$$

6)　この内訳の数値は，「最初に利回りが1％上昇して，それから2年が経過した」と仮定して算出したものであり，厳密には正しくない。正しい数値は後記の通りである。

$= -9.5146099$

となる。つまり，9.51円の資本損失の内訳は0.48円が期間短縮に起因する分，そして9.03円が利回り変化に起因する分である。

【5】 リスク軽減の手段

債券投資に伴なう諸々のリスクは不可避のものかというとそうではない。回避する手段もいくつかある。個別の債券投資とリスク回避の手段を整理すると次のようになる7)。

(1) 期間対応

投資を計画している期間にふさわしい残存期間を選択することによって，リスクのいくつかを回避あるいは軽減することができる。表2は投資期間が残存期間より長いか，同じか，それとも短いかによってどのどうな種類のリスクを回避あるいは軽減することができるか，一覧表の形にしたものである。

表2 投資期間とリスク

リスク／投資期間	債務不履行リスク	金利変動リスク		途中償還リスク		期間短縮による価格変動リスク
		価格変動リスク	再投資リスク	抽選償還リスク	繰上げ償還リスク	
残存期間＜投資期間	○	○	○	△	△	○
残存期間＝投資期間	○	×	○	○	○	×
残存期間＞投資期間	○	○	○	○	○	○

(注) ○…リスクあり △…部分的に回避可 ×…回避可

債務不履行リスクは，投資期間を短かくすることによってそれを蒙るリスクの確率を小さくすることができるが，完全に回避することはできない。途中償還リスクは債券が償還されない据置期間以内に投資期間を限れば完全に回避できるが，そうでなければ回避不可能である（表2で「部分的に回避可」としているのはそのためである)。投資家にとって最も重要な価格変動リスク（2つとも）は，投資期間に等しい長さの残存期間をもつ債券に投資することで完全

7) 債券ポートフォリオのリスク軽減の手段と混同してはいけない。

に逃れることができる。これは償還価格が前もって確定しているからである。もう一つの重要なリスク，再投資リスク，は投資期間の調整によっては全く回避できない。満期日まで保有された債券の実現利回り[8]が通常最終利回りと一致しないのはこの再投資リスクに起因する。

(2) イミュニゼーション

金利変動リスクは危険回避者の投資家にとっては好ましい一つの大きな特徴を持っている。それは，価格変動リスクと再投資リスクが互に相殺し合うという点である。金利が上昇すると債券価格が下落するため資本損失を招き投資収益率を引き下げるが，他方再投資レートが良くなるためクーポン利子の再投資収入が増加し投資収益率を押し上げる。その結果として実現利回りの変動は小さくなる。金利が下落する場合は全く逆のことが起こり，やはり実現利回りの変動が小さくなる。15年程前から債券投資のイミュニゼーション運用が大きな注目を集めている。これは債券投資期間に債券のデュアレーションを一致させることによって投資収益率の大きさを事前に確定しようとするものである。

われわれは後続の諸節において，リスクの中で最も重要な価格変動リスクについて考察する。最終利回り（複利）概念は米国方式であれ AIBD 方式であれ，直物利子率の期間構造（the term structure of spot interest rates）がフラットであるという特殊な仮定を前提にしていることは良く知られている。また，わが国で良く用いられる単利方式の最終利回り指標は複利方式の近似式である[9]。キャッシュ・フローの現在資産価値および利回りの計算にはそれぞれの長さの期間に対応した直物利子率（スポット・レート）――換言すれば，その時に成立している直物利子率の期間構造――を用いて行なうのが正しい[10]。しかし，現実には現在成立している直物利子率の期間構造を瞬時に知

8) 「実現利回り（realized yield)」もしくは「実現収益率（realized rate of return)」は事後的概念であるため，債券投資の収益性指標とはならない点が欠点である。

9) 拙稿〔3〕，p. 31を参照。

10) キャッシュ・フローの将来資産価値を求めるには，先物利子率の期間構造がわかっていることが前提になる。

ることはほとんど不可能であり[11]，まだ実用化されていない。現状では最終利回りや所有期間利回りおよび実効利回りが収益性指標として用いられており，特にわが国では，単利方式の利回り指標が使われている。このような実情にあわせて，価格変動リスクの考察においても最終利回りを基に行なうことにしたい。

3　価格変動率――単利方式のケース――

単利方式の最終利回りを用いて利回り変動に起因する価格変動リスクを調べてみる。

【1】　微分形式

単利最終利回りは

$$r=\frac{100r_c+(\bar{P}-P)/n}{P} \tag{7}$$

と定義される。これから，Pをrの関数とみなして

$$P=\frac{\bar{P}+100r_cn}{1+nr}. \tag{4}$$

よって

$$\frac{\partial P}{\partial r}=-\frac{(\bar{P}+100r_cn)}{(1+nr)^2}=-\frac{n}{1+nr}P \tag{8}$$

ここで，εを

$$\varepsilon=\left|\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}\right|=\frac{n}{1+nr} \tag{9}$$

と定義する。

(4)式より

$$log\,P=log(\bar{P}+100r_cn)-log(1+nr).$$

11)　もし同一発行者のあらゆる残存期間の割引債が存在するならば，期間構造は瞬時に知ることができよう。

両辺の全微分をとると

$$\frac{dP}{P}=-\frac{n}{1+nr}dr,$$

$$\frac{dP}{P}=-\varepsilon dr. \tag{10}$$

ε は最終利回りの微小変化による債券価格変動が価格水準に対して占める比率を示しており，「価格変動係数」と呼ぶことができる。そして $|dP/P|$ は最終利回りの変化による価格変化の割合の絶対値を示しており，「価格変動率」と呼ばれる[12)]。両者の間には

価格変動率＝価格変動係数×最終利回り変化分

という関係が成り立つ。

さて，価格変動係数 ε は以下の特性を持っている。

(1)　残存期間と価格変動係数

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}=\frac{1}{(1+nr)^2}>0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial n^2}=-\frac{\partial r}{(1+nr)^3}>0$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon=\frac{1}{r} \tag{11}$$

価格変動係数の値は残存期間が長くなる程大きくなるが，その増加の度合いは逓減し，永久債の場合にはその値は $1/r$ に収束する。逆に，残存期間がゼロに近づくと価格変動係数は0に近づく。この関係を図示すると図2のようになる。

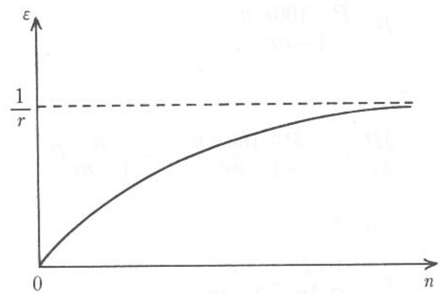


図2　価格変動係数と残存期間

図3は8％クーポン債10年物の最終利回り6％，7％，8％に関してそれぞれ等利回り価格曲線を描いたものである。

9年債と3年債を例にとって，最終利回り7％で購入した場合，それぞれ上

12)　容易にわかるように価格変動率は投資金額1円当たりの資本利得もしくは資本損失を示しており，資本利得率もしくは資本損失率と解釈することができる。

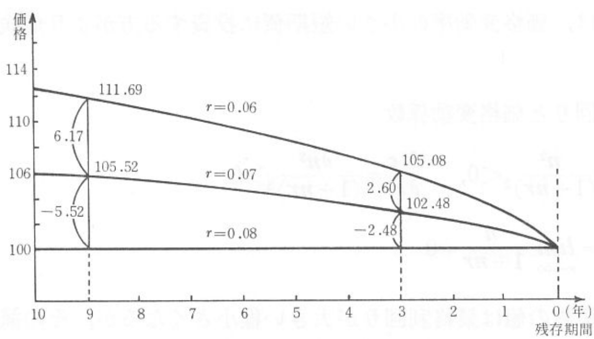


図3　長期債と短期債の価格変動率

下方1％（1ポイント）の利回り変動がもたらす価格変化の違いを見てみる。9年債の場合1％の利回り低下による価格変動幅は6.17円で，逆に1％の利回り上昇による価格変動幅は5.52円であり，平均して5.85円になる。3年債の場合にはそれぞれ2.60円と2.48円であり，平均して2.54円になる。それぞれの平均価格変動率を計算してみると

9年債の場合　$\dfrac{5.85}{105.52}\times 100 = 5.54(\%)$

3年債の場合　$\dfrac{2.54}{102.48}\times 100 = 2.48(\%)$

である。これから債券の投資戦略として次の原則が得られる。

〔投資戦略の原則　1〕

債券投資の「金利予想に基づく運用」原則は次の通りである[13)]。

① 市場利子率下落が予想される場合には，価格変動率の大きい長期債に投資して大きな資本利得を狙う。

② 市場利子率上昇が予想される場合には，価格変動率の小さい短期債に投資して資本損失を小さくする。

③ 市場利子率の先行きが全く予想できない場合（上昇・下落の確率が半々の

13)　この原則は「長期債も短期債も同一ポイントだけ変化する」という前提の上に立っているが，現実には短期債ほど利回り変動が激しい。しかしこの事実を考慮しても，「長期債ほど価格変動率が大きい」という結論に変わりはないようである。野村総合研究所〔5〕，p. 62. を見よ。

場合）には，価格変動率の小さい短期債に投資する方がより危険回避的である[14]。

(2)　最終利回りと価格変動係数

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}=-\frac{n^2}{(1+nr)^2}<0,\qquad \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial r^2}=\frac{\partial n^3}{(1+nr)^3}>0$$
$$\lim_{r\to\infty}\varepsilon=\lim_{r\to\infty}\frac{n}{1+nr}=0 \tag{12}$$

価格変動係数の値は最終利回りが大きい程小さくなるが，その減少の度合いは逓減する。最終利回りが無限大の場合には価格変動係数はゼロになる。図4は価格変動係数と最終利回りとの関係を図示したものである。

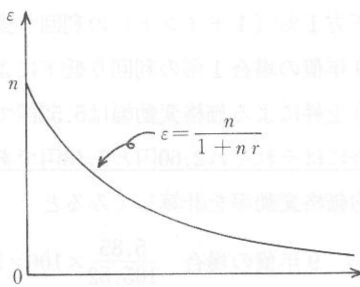


図4　価格変動係数と最終利回り

この特性から債券投資に関して次の原則が成り立つ。

〔投資戦略の原則　2〕

金融情勢に応じて価格変動リスクの重大性は異なる。同一ポイントの最終利回り変動に対して，低金利時代は高金利時代より価格変動率が大きくなるので，価格変動リスクに対してより一層の注意が必要である。

たとえば，10年物債券の価格変動係数は最終利回りが12％の時には4.55だが，最終利回りが4％の時には7.14と56％も大きくなる（表3参照）。これは最終利回りが1ポイント上昇した時，12％の高金利時代であれば100円につき4円55銭の資本損失で済むが，4％の低金利時代であれば100円につき7円14銭もの資本損失を蒙ることを意味している[15]。

14）長期債と短期債を比べると資本損益率の期待値はゼロで同じだが，そのバラツキにおいて短期債の方が長期債より小さいからである。

15）$r=0.12$ の時，$|dp/p|=4.55\times0.01=0.0455$. これは $P=100$円であれば $\Delta P=-4.55$円であることを意味する。この価格変動率の計算は近似値計算であり，真の価格変動率は $0.455/(1+0.0455)=0.0435$ である。後記の〔債券投資の手引き 2〕を見よ。

表 3　残存期間別・最終利回り別の価格変動係数

n ＼ r	0 %		4 %		6 %		8 %		10%		12%		15%	
	P	ε	P	ε	P	ε	P	ε	P	ε	P	ε	P	ε
∞	∞	∞	200.00	25.000	133.33	16.667	100.00	12.500	80.00	10.000	66.67	8.333	53.33	6.667
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	900.00	100.000	180.00	20.000	128.57	14.286	100.00	11.111	81.82	9.091	69.23	7.692	56.25	6.250
75	700.00	75.000	175.00	18.750	127.27	13.636	100.00	10.714	82.35	8.824	70.00	7.500	57.14	6.122
50	500.00	50.000	166.67	16.667	125.00	12.500	100.00	10.000	83.33	8.333	71.43	7.143	58.82	5.882
40	420.00	40.000	161.54	15.385	123.53	11.765	100.00	9.524	84.00	8.000	72.41	6.897	60.00	5.714
30	340.00	30.000	154.55	13.636	121.43	10.714	100.00	8.824	85.00	7.500	73.91	6.522	61.82	5.455
20	260.00	20.000	144.44	11.111	118.18	9.091	100.00	7.692	86.67	6.667	76.47	5.882	65.00	5.000
19	252.00	19.000	143.18	10.795	117.76	8.879	100.00	7.540	86.90	6.552	75.83	5.793	65.45	4.935
18	244.00	18.000	141.86	10.465	117.31	8.654	100.00	7.377	87.14	6.429	77.22	5.696	65.95	4.865
17	236.00	17.000	140.48	10.119	116.83	8.416	100.00	7.203	87.41	6.296	77.63	5.592	66.48	4.789
16	228.00	16.000	139.02	9.756	116.33	8.163	100.00	7.018	87.69	6.154	78.08	5.479	67.06	4.706
15	220.00	15.000	137.50	9.375	115.79	7.895	100.00	6.818	88.00	6.000	78.57	5.357	67.69	4.615
14	212.00	14.000	135.90	8.974	115.22	7.609	100.00	6.604	88.33	5.833	79.10	5.224	68.39	4.516
13	204.00	13.000	134.21	8.553	114.61	7.303	100.00	6.373	88.70	5.652	79.69	5.008	69.15	4.407
12	196.00	12.000	132.43	8.108	113.95	6.977	100.00	6.122	89.09	5.455	80.33	4.918	70.00	4.286
11	188.00	11.000	130.56	7.639	113.25	6.627	100.00	5.851	89.52	5.238	81.03	4.741	70.94	4.151
10	180.00	10.000	128.57	7.143	112.50	6.250	100.00	5.556	90.00	5.000	81.82	4.545	72.00	4.000
9	172.00	9.000	126.47	6.618	111.69	5.844	100.00	5.233	90.53	4.737	82.69	4.327	73.19	3.830
8	164.00	8.000	124.24	6.061	110.81	5.405	100.00	4.878	91.11	4.444	83.67	4.082	74.55	3.636
7	156.00	7.000	121.88	5.469	109.86	4.930	100.00	4.487	91.76	4.118	84.78	3.804	76.10	3.415
6	148.00	6.000	119.35	4.839	108.82	4.412	100.00	4.054	92.50	3.750	86.05	3.488	77.89	3.158
5	140.00	5.000	116.67	4.167	107.69	3.846	100.00	3.571	93.33	3.333	87.50	3.125	80.00	2.857
4	132.00	4.000	113.79	3.448	106.45	3.226	100.00	3.030	94.29	2.857	89.19	2.703	82.50	2.500
3	124.00	3.000	110.71	2.679	105.08	2.542	100.00	2.419	95.38	2.308	91.18	2.206	85.52	2.069
2	116.00	2.000	107.41	1.852	103.57	1.786	100.00	1.724	96.67	1.667	93.55	1.613	89.23	1.538
1	108.00	1.000	103.85	0.962	101.89	0.943	100.00	0.926	98.18	0.909	96.43	0.893	93.91	0.870
0.5	104.00	0.500	101.96	0.490	100.97	0.485	100.00	0.481	99.05	0.476	98.11	0.472	96.74	0.465
0.4	103.20	0.400	101.57	0.394	100.78	0.391	100.00	0.388	99.23	0.385	98.47	0.382	97.36	0.377
0.3	102.40	0.300	101.19	0.296	100.59	0.295	100.00	0.293	99.42	0.291	98.84	0.290	97.99	0.287
0.2	101.60	0.200	100.79	0.198	100.40	0.198	100.00	0.187	99.61	0.196	99.22	0.195	98.64	0.194
0.1	100.80	0.100	100.40	0.100	100.20	0.099	100.00	0.099	99.80	0.099	99.60	0.099	99.31	0.099
0	100.00	0.000	100.00	0.000	100.00	0.000	100.00	0.000	100.00	0.000	100.00	0.000	100.00	0.000

（注）表面利率 8 %

(3)　表面利率と価格変動係数

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_c}=0, \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial {r_c}^2}=0 \tag{13}$$

表面利率の大きさは価格変動係数の値とは関無係である。

表3は8％クーポン債を例にとり，残存期間別・最終利回り別に価格変動係数の値を算出して掲示した一覧表である。そして表3に基づいて，価格変動係数と残存期間との関係を最終利回り別に図示したものが図5である。

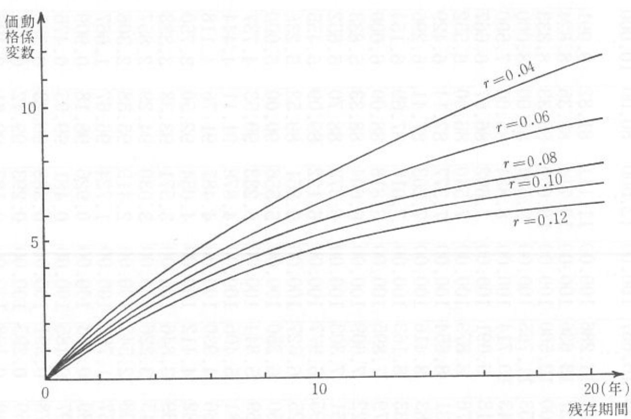


図5　残存年数と価格変動係数（最終利回り別）

【2】　差分形式

価格変動係数を用いて価格変動率を算出するには，最終利回りの変動が十分に小さくなければならない。最終利回りの変動が大きいと価格変動率の誤差が大きくなるからである。というのは，本来価格変動係数はそれ自体最終利回り変化分の関数なのである（(18)式参照)。

正確な価格変動率を求めるには差分方程式を用いればよい。(4)式において最終利回りが $\varDelta r$ だけ変化すると，価格は

$$P(r+\varDelta r)=\frac{\bar{P}+100r_c n}{1+n(r+\varDelta r)} \tag{14}$$

に変化する。よって

$$\frac{\varDelta P(r)}{P(r)}=\frac{1}{P(r)}[P(r+\varDelta r)-P(r)]$$

$$=-\frac{n}{1+n(r+\varDelta r)}\varDelta r,$$

$$\frac{\varDelta P(r)}{P(r)}=-\varepsilon^{*}\varDelta r, \tag{15}$$

$$\varepsilon^{*}=\frac{n}{1+n(r+\varDelta r)}. \tag{16}$$

ε^{*} は差分形式で表わした価格変動係数であるが，ε と異なり $\varDelta r$ の関数である。$\varDelta r$ が非常に小さければ無視して，近似的に

$$\frac{\varDelta P(r)}{P(r)}==\frac{n}{1+nr}\varDelta r=-\varepsilon\varDelta r \tag{17}$$

となる。つまり，ε は ε^{*} の近似値であり，微分形式の価格変動率算式 (11) 式は差分形式の価格変動率算式 (15) 式の近似式なのである。

ε^{*} の特性は残存期間，最終利回り，そして表面利率に関しては ε と全く同じである。

$$\frac{\partial\varepsilon^{*}}{\partial n}=\frac{1}{\{1+n(r+\varDelta r)\}^{2}}>0,\quad \frac{\partial^{2}\varepsilon^{*}}{\partial n^{2}}=-\frac{2(r+\varDelta r)}{\{1+n(r+\varDelta r)\}^{3}}<0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial\varepsilon^{*}}{\partial r}=-\frac{n^{2}}{\{1+n(r+\varDelta r)\}^{2}}<0,\quad \frac{\partial^{2}\varepsilon^{*}}{\partial r^{2}}=\frac{2n^{3}}{\{1+n(r+\varDelta r)\}^{3}}>0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial\varepsilon^{*}}{\partial r_{c}}=0,\quad \frac{\partial^{2}\varepsilon^{*}}{\partial r_{c}{}^{2}}=0 \tag{19}$$

$\varDelta r$ に関しては

$$\frac{\partial\varepsilon^{*}}{\partial\varDelta r}=-\frac{n^{2}}{\{1+n(r+\varDelta r)\}^{2}}<0,\quad \frac{\partial^{2}\varepsilon^{*}}{\partial\varDelta r^{2}}=\frac{2n^{3}}{\{1+n(r+\varDelta r)\}^{3}}>0 \tag{20}$$

$$\lim_{\varDelta r\to 0}\varepsilon^{*}=\varepsilon,\quad \lim_{\varDelta r\to\infty}\varepsilon^{*}=0$$

が成り立つ。$\varDelta r=0$ の時に $\varepsilon^{*}=\varepsilon$ であるが，$\varDelta r$ の絶対値が大きくなるに従って $\varepsilon^{*}-\varepsilon$ の絶対値は大きくなる。特に，$\varDelta r<0$ の場合 ε^{*} と ε との乖離が大きくなる。

さて，

$$\frac{\partial(-\varepsilon^*\Delta r)}{\partial\Delta r}$$

$$=-\frac{n(1+nr)}{\{1+n(r+\Delta r)\}^2}<0$$

$$\frac{\partial^2(-\varepsilon^*\Delta r)}{\partial\Delta r} \qquad (21)$$

$$=\frac{2n^2(1+nr)}{\{1+n(r+\Delta r)\}^3}>0$$

で，かつ

$$-\varepsilon^*\Delta r-(-\varepsilon\Delta r)$$

$$=\frac{n^2\Delta r^2}{(1+nr)\{1+n(r+\Delta r)\}}>0 \qquad (22)$$

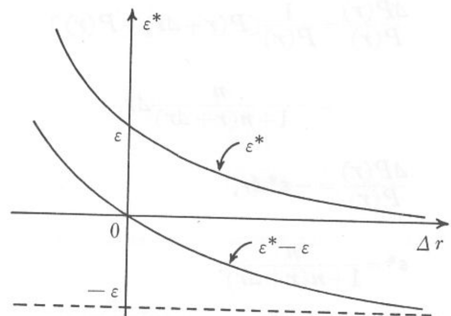


図６　価格変動係数（差分形式）と最終利回り変動

だから，Δr を横軸にそして $\Delta P/P$ を縦軸にして $-\varepsilon^*\Delta r$ と $-\varepsilon\Delta r$ のグラフを書くと，図７になる。これから次のことがわかる。

① 価格変動率の近似値 $\varepsilon\Delta r$ は真の値 $\varepsilon^*\Delta r$ を Δr が正の時には過大評価し，逆に Δr が負の時には過少評価する。

② Δr の絶対値が大きい程，近似値の真の値からの乖離は大きくなる。

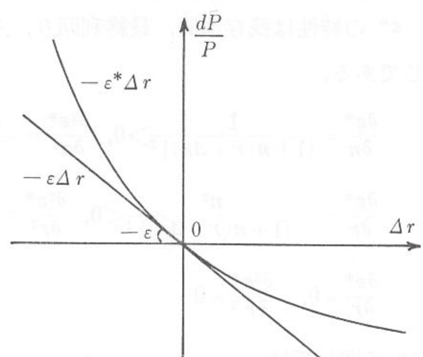


図７　価格変動率の真の値と近似値

ところで，実務的には他の近似式も用いられているようだ[16]。最終利回りが上下へ同一ポイント変動した時の価格変動幅の平均値を「平均価格変動幅」と呼ぶことにする。平均価格変動幅 $\overline{\Delta P(r)}$ は

$$\overline{\Delta P(r)}=\frac{1}{2}[\{P(r+\Delta r)-P(r)\}+\{P(r)-P(r-\Delta r)\}]$$

$$=\frac{1}{2}\{P(r+\Delta r)-P(r-\Delta r)\}$$

16）　たとえば野村総合研究所〔５〕，pp. 62-64を参照せよ。

$$= -\frac{(\bar{P}+100r_c n)n}{\{1+n(r-\Delta r)\}\{1+n(r+\Delta r)\}}\Delta r \tag{23}$$

となるから，平均価格変動係数 $\bar{\varepsilon}$ は

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{P(r)}\frac{\overline{\Delta P(r)}}{\Delta r} = \frac{(1+nr)n}{\{1+n(r-\Delta r)\}\{1+n(r+\Delta r)\}}, \tag{24}$$

また，平均価格変動率は

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = -\bar{\varepsilon}\Delta r = -\frac{(1+nr)n}{\{1+n(r-\Delta r)\}\{1+n(r+\Delta r)\}}\Delta r \tag{25}$$

で示される。

ところで

$$\frac{\partial(-\bar{\varepsilon}\Delta r)}{\partial \Delta r} = -\frac{n(1+nr)\{(1+nr)^2+n^2\Delta r^2\}}{\{1+n(r-\Delta r)\}^2\{1+n(r+\Delta r)\}^2} < 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2(-\bar{\varepsilon}\Delta r)}{\partial \Delta r^2} = -\frac{2n^3(1+nr)\{3(1+nr)^2+n^2\Delta r^2\}\Delta r}{\{1+n(r-\Delta r)\}^3\{1+n(r+\Delta r)\}^3}$$

$$\begin{aligned} &< 0 \quad (\Delta r > 0 \text{ の時}) \\ &= 0 \quad (\Delta r = 0 \text{ の時}) \\ &> 0 \quad (\Delta r < 0 \text{ の時}), \end{aligned} \tag{27}$$

また

$$-\bar{\varepsilon}\Delta r - (-\varepsilon^*\Delta r) = -\frac{n^2\Delta r^2}{\{1+n(r-\Delta r\}\{1+n(r+\Delta r)\}} < 0 \tag{28}$$

$$-\bar{\varepsilon}\Delta r - (-\varepsilon\Delta r) = -\frac{n^3\Delta r^3}{\{1+n(r-\Delta r)\}(1+nr)\{1+n(r+\Delta r)\}}$$

$$\begin{aligned} &> 0 \quad (\Delta r > 0 \text{ の時}) \\ &- 0 \quad (\Delta r = 0 \text{ の時}) \\ &> 0 \quad (\Delta r < 0 \text{ の時}) \end{aligned} \tag{29}$$

となる。

これより $-\bar{\varepsilon}\Delta r$ のグラフは原点を偏曲点とした曲線で，$\Delta r > 0$ の領域では $-\varepsilon\Delta r$ のグラフの下方に位置し，$\Delta r < 0$ の領域では $-\varepsilon\Delta r$ と $-\varepsilon^*\Delta r$ のグラフの中間に位置することがわかる（図8参照）。$\Delta r \to 0$ の時には

$$\varepsilon^* = \bar{\varepsilon} = \varepsilon = \frac{n}{1+nr} \tag{30}$$

となる。結論として次のことを述べておく。

〔債券投資の手引　1〕

① 価格変動率の近似値を求める2つの方式は，近似値の精度においてはほとんど遜色がない[17]。

② 価格変動係数を用いた算出方式(11)式の方が平均価格変動係数を用いた算出方式(25)式より優れている。それは㋑前者が後者より簡便である，㋺前者を用いると価格変動率の真の値も容易に求められる[18]，という理由による。

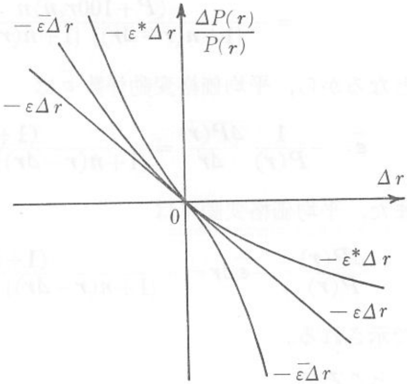


図8　3つの価格変動率の大小関係

債券投資の参考のために，最終利回りが上下へ0.1%（10ベーシス・ポイント）変動した時の平均価格変動率 $-\bar{\varepsilon}\Delta r$ を計算して一覧表にしたのが表4である。表面利率は8%と仮定されている。最終利回り8%の債券を例にとると，最終利回りの±0.1%の変動に対する平均価格変動は，価格100円に対しておよそ

1年債　9銭

5年債　36銭

10年債　56銭

である[19]。

価格変動係数 ε を用いて価格変動率の近似値を求めるつもりならば，表3の ε の値に $\Delta r = 0.001$ を乗じればよい。最終利回り8%の10年債の価格変動率は

17）このことは表3と表4を比較してみるとよくわかる。

18）後記の〔債券投資の手引き　2〕を参照せよ。

19）これは満期日が迫るにつれて，債券価格の一定の変動に起因する最終利回りの変化が急激に大きくなることと表裏一体をなしている。

表4　残存期間別・最終利回り別の平均価格変動係数

n \ r	4%			6%			8%			10%			12%		
	P	$\overline{\Delta P}$	$\overline{\varepsilon}$	P	$\overline{\Delta P}$	$\overline{\varepsilon}$	P	$\overline{\Delta P}$	$\overline{\varepsilon}$	P	$\overline{\Delta P}$	$\overline{\varepsilon}$	P	$\overline{\Delta P}$	$\overline{\varepsilon}$
17	140.48	1.42	1.01	116.83	0.98	0.84	100.00	0.72	0.72	87.41	0.55	0.63	77.63	0.43	0.56
16	139.02	1.36	0.98	116.33	0.95	0.82	100.00	0.70	0.70	87.69	0.54	0.62	78.08	0.43	0.55
15	137.50	1.29	0.94	115.79	0.91	0.79	100.00	0.68	0.68	88.00	0.53	0.60	78.57	0.42	0.54
14	135.90	1.22	0.90	115.22	0.88	0.76	100.00	0.66	0.66	88.33	0.52	0.58	79.10	0.41	0.52
13	134.21	1.15	0.86	114.61	0.84	0.73	100.00	0.64	0.64	88.70	0.50	0.57	79.69	0.40	0.51
12	132.43	1.07	0.81	113.95	0.80	0.70	100.00	0.61	0.61	89.09	0.49	0.55	80.33	0.40	0.49
11	130.56	1.00	0.76	113.25	0.75	0.66	100.00	0.58	0.58	89.52	0.47	0.52	81.03	0.38	0.47
10	128.57	0.92	0.72	112.50	0.71	0.63	100.00	0.56	0.56	90.00	0.45	0.50	81.82	0.37	0.45
9	126.47	0.84	0.66	111.69	0.65	0.58	100.00	0.53	0.53	90.53	0.43	0.47	82.69	0.36	0.43
8	124.24	0.75	0.61	110.81	0.60	0.54	100.00	0.49	0.49	91.11	0.41	0.47	83.67	0.34	0.41
7	121.88	0.67	0.55	109.86	0.54	0.49	100.00	0.45	0.45	91.76	0.38	0.41	84.78	0.32	0.38
6	119.35	0.58	0.48	108.82	0.48	0.44	100.00	0.41	0.41	92.50	0.35	0.38	86.05	0.30	0.35
5	116.67	0.49	0.42	107.69	0.42	0.39	100.00	0.36	0.36	93.33	0.32	0.34	87.50	0.27	0.31
4	113.79	0.39	0.34	106.45	0.35	0.33	100.00	0.30	0.30	94.29	0.27	0.29	89.19	0.24	0.27
3	110.71	0.30	0.27	105.08	0.28	0.26	100.00	0.24	0.24	95.38	0.22	0.23	91.18	0.20	0.22
2	107.41	0.20	0.19	103.57	0.19	0.18	100.00	0.17	0.17	96.67	0.16	0.17	93.55	0.15	0.16
1	103.85	0.10	0.10	101.89	0.10	0.10	100.00	0.09	0.09	98.18	0.09	0.09	96.43	0.09	0.09

（注）価格，平均価格変動幅は円，平均価格変動率は百分率表示。

$5.556\times0.001=0.005556$（100円に対して55銭5分6厘）

となる。

【3】 近似値計算と誤差率

価格変動率の近似値計算による誤差はどれ程の大きさであろうか。図8から容易に察しがつくように，利回り変化が大きい程誤差は大きくなる。しかし，誤差の大きさは利回り変化のみに依存するのではない。

いま，誤差率e，$\overline{e}$を次のように定義する。

$$e=\frac{-\varepsilon\Delta r-(-\varepsilon^*\Delta r)}{-\varepsilon^*\Delta r}=\frac{\varepsilon-\varepsilon^*}{\varepsilon^*} \tag{31}$$

$$\overline{e}=\frac{-\overline{\varepsilon}\Delta r-(-\varepsilon^*\Delta r)}{-\varepsilon^*\Delta r}=\frac{\overline{\varepsilon}-\varepsilon^*}{\varepsilon^*} \tag{32}$$

e，$\bar{e}$を計算すると次の結果が得られる。

$$e=\frac{n}{1+nr}\Delta r \qquad (31)'$$

$$\bar{e}=\frac{n\Delta r}{1+nr-n\Delta r} \qquad (32)'$$

これからわかるように，e，$\bar{e}$ともにΔrの他にnとrの関数である。

$$\frac{\partial e}{\partial \Delta r}=\frac{n}{1+nr}>0 \qquad \frac{\partial \bar{e}}{\partial \Delta r}=\frac{n(1+nr)}{\{1+n(r-\Delta r)\}^2}>0$$

$$\frac{\partial e}{\partial n}=\frac{\Delta r}{(1+nr)^2}>0 \qquad \frac{\partial \bar{e}}{\partial n}=\frac{\Delta r}{\{1+n(r-\Delta r)\}^2}>0 \qquad (33)$$

$$\frac{\partial e}{\partial r}=-\frac{n^2\Delta r}{(1+nr)^2}<0 \qquad \frac{\partial \bar{e}}{\partial r}=-\frac{n^2\Delta r}{\{1+n(r-\Delta r)\}^2}<0$$

e，$\bar{e}$のどちらも，ⓐ残存期間nが長い程，ⓑ利回り変化Δrが大きい程，そしてⓒ最終利回り水準rが低い程，大きい。

表5は残存期間，最終利回りのいろいろな値に対して，最終利回りが1％（1ポイント）変化した時に誤差率eがどれ程の大きさになるか試算したものである。(31)′式からわかるように，eはΔrの線形増加関数であるから，最

表5　残存期間別・最終利回り別の誤差率（e）　　（単位％）

n ＼ r	0％	1％	3％	5％	8％	10％	15％	20％
∞	∞	100.00	33.33	20.00	12.50	10.00	6.67	5.00
100	100.00	50.00	25.00	16.67	11.11	9.09	6.25	4.76
50	50.00	33.33	20.00	14.29	10.00	8.33	5.88	4.55
20	20.00	16.67	12.50	10.00	7.69	6.67	5.00	4.00
10	10.00	9.09	7.69	6.67	5.56	5.00	4.00	3.33
5	5.00	4.76	4.35	4.00	3.57	3.33	2.86	2.55
3	3.00	2.91	2.75	2.61	2.42	2.31	2.07	1.88
1	1.00	0.99	0.97	0.95	0.93	0.91	0.87	0.83
0.5	0.50	0.50	0.50	0.49	0.48	0.48	0.47	0.45
0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.24	0.24	0.24
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

（注）$\Delta r=0.01$（1ポイント）と仮定，eの数値はパーセンテージ（$100e$）．小数第3位を四捨五入。

終利回りが α ベーシス・ポイント変化した場合の誤差率は表の数値に $\alpha/100$ を乗じれば得られる。

①残存期間20年の8％クーポン債の最終利回りが8％（価格は100円）から9％へ上昇する時，価格は92.86円へ下落する[20)]。この場合，価格変動率の真の値は7.14％であるが[21)]，価格変動係数を用いて算出した近似値は7.69％（表3より）であり，その誤差率は7.69％（表5より）である[22)]。

②残存期間5年の12％クーポン債の最終利回りが15％から14.5へ下落する時，価格変動率（近似値）は，1.4285％(0.02857÷100×50＝0.014285)で誤差率は−1.43％だから，価格変動率の真の値は1.449％である[23)]。

③残存期間10年の8％クーポン債の最終利回りが10％（価格90円）から12％へ上昇する時には，価格変動率（近似値）は10％で誤差率も10％だから，真の価格変動率は9.09％である[24)]。つまり，価格は90円から8.18円下落して81.82円になる[25)]。

わが国で債券ディーリングの主要な対象になっている10年物国債の場合，価格変動係数を用いた価格変動率の近似値計算はどんな最終利回り水準でも，1ポイントの利回り変化に対して10％以下の誤差におさまる。20年物の債券であっても，5％以上の最終利回り水準であれば10％以下の誤差率である。利回り変化が2ポイント，3ポイントとなれば，誤差率も表5の数値の2倍，3倍となる。どの程度の誤差率を許容範囲と考えるかは投資家の主観的な判断による。

ここで一つ注目に値するおもしろい関係が発見される。(9)式と(31)′式か

---

20)　$P=(100+100\times 0.8\times 20)/(1+20\times 0.09)=92.857142$(円)。

21)　$-\varepsilon^{*}\varDelta r=-(92.857142-100)/100=0.0714286$。

22)　誤差率を計算で求めると，$e=-(0.0769-0.0714)/0.0714=0.0770308$ と約7.70％になり，表5の数値と一致しないのは価格変動率の近似値と真の値自身が四捨五入されているからである。

23)　与えられた数値に(31)式を適用すると，$(0.014285-\varepsilon^{*}\varDelta\gamma)/\varepsilon^{*}\varDelta\gamma=-0.00143$。これより $-\varepsilon^{*}\varDelta\gamma=0.00144922$.

24)　$(0.10-\varepsilon^{*}\varDelta\gamma)/\varepsilon^{*}\varDelta\gamma=0.10$ より $\varepsilon^{*}\varDelta\gamma=0.090909$.

25)　$\varDelta P/P=-\varepsilon^{*}\varDelta\gamma$ に数値を代入して，$\varDelta P/90=-0.0909$. これより，$\varDelta P=-8.18181$.

ら

$$e=\varepsilon\Delta r. \tag{12}$$

これを(31)式に代入して

$$\varepsilon^{*}\Delta r=\frac{\varepsilon\Delta r}{1+\varepsilon\Delta r} \tag{35}$$

が得られる。この式は価格変動率の真の値と近似値との関係式である。債券投資の手引きとして述べておこう。

〔債券投資の手引き　2〕

①価格変動率の近似値は表3に掲げた価格変動係数を用いて簡単に算出できる。つまり，価格変動係数に最終利回りの変化分を乗じれば良い。1ポイントの変化ならば0.01，10ベーシス・ポイントの変化ならば0.001である((10)式)。

②価格変動係数を用いて算出した価格変動率の近似値から真の値を容易に導出することができる。近似値を1＋近似値（利子率上昇の時）または1－近似値（利子率下落の時）で割れば，それが価格変動率の真の値である((35)式)。

4　価格変動率――複利方式のケース――

この節では欧米で一般に用いられている複利の最終利回り計算方式を対象に価格変動率を導出し，その特性を調べる。

複利方式では最終利回りは次式で表わされる[26)]。

$$P=\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+r)^{t}}-\frac{\overline{P}}{(1+r)^{n}} \tag{28}$$

全微分すると

26)　C, r_c, r はそれぞれ1期間におけるクーポン利子，表面利率，最終利回りを表わしている。従って，AIBD方式では年間のクーポン利子，年率表示の表面利率と最終利回りを指すが，米国方式では半年間のクーポン利子，年率表示の表面利率と最終利回りを2で割った値を指す。

$$dP=-\frac{1}{1+r}\left\{\sum_{t=1}^{n}\frac{Ct}{(1+r)^t}+\frac{\bar{P}n}{(1+r)^n}\right\}dr$$

だから，よって

$$\frac{dP}{P}=-\left\{\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{Ct}{(1+r)^t}+\frac{\bar{P}n}{(1+r)^n}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+r)^t}+\frac{\bar{P}}{(1+r)^n}}\right\}\left(\frac{1}{1+r}\right)dr \tag{29}$$

となる。

ここで，

$$D=\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{Ct}{(1+r)^t}+\frac{\bar{P}n}{(1+r)^n}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+r)^t}+\frac{\bar{P}}{(1+r)^n}} \tag{30}$$

と定義すると

$$\frac{dP}{P}=-D\frac{1}{1+r}dr \tag{31}$$

が得られる。(31)式から価格変動係数 ϵ は

$$\epsilon=\left|\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}\right|=D\left(\frac{1}{1+r}\right) \tag{32}$$

そして価格変動率は

$$\frac{dP}{P}=\epsilon dr \tag{33}$$

となる[27)]。Dはマッコーレイ（F. D. Macaulay）によって考察された債券の「デュアレーション（duration)」の定義である[28)]。

ところで，$1/(1+r)$ は債券キャッシュ・フローの割引因子（discount factor）であるからαとおくと，(28)式は

$$P=\sum_{t=1}^{n}C\alpha^t+\bar{P}\alpha^n \tag{28)$'$}$$

---

27) (31)式はわれわれのとは異なる論旨において，Fisher〔9〕, pp. 113-14, Hopewell and Kaufman〔13〕, p. 751 などで導出されている。

28) Macaulay〔14〕, p. 48.

と書き直せる。(28)′式を用いると

$$dP=\sum_{t=1}^{n}tC\alpha^{t-1}d\alpha+\bar{P}n\alpha^{n-1}d\alpha$$

$$=\left(\sum_{t=1}^{n}tC\alpha^{t}+\bar{P}n\alpha^{n}\right)\frac{1}{\alpha}d\alpha$$

$$\frac{dP}{P}=\frac{\sum_{t=1}^{n}tC\alpha^{t}+\bar{P}n\alpha^{n}}{\sum_{t=1}^{n}C\alpha^{t}+\bar{P}\alpha^{n}}\ \frac{1}{\alpha}d\alpha$$

$$\frac{dP}{P}=D\ \frac{d\alpha}{\alpha} \tag{31$'$}$$

よって,

$$\frac{\alpha}{P}\frac{dP}{d\alpha}=D \tag{39}$$

となる。すなわち，デュアレーションは債券価格の割引因子に関する弾力性に等しい。

単利最終回りのケースと同様に，価格変動係数 ε の特性について調べてみよう。

(1)残存期間の効果

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{D}{1+r}\right)$$

$$=\frac{1}{1+r}\frac{\partial D}{\partial n}$$

ここで，$\partial D/\partial n$ の符号に関しては,

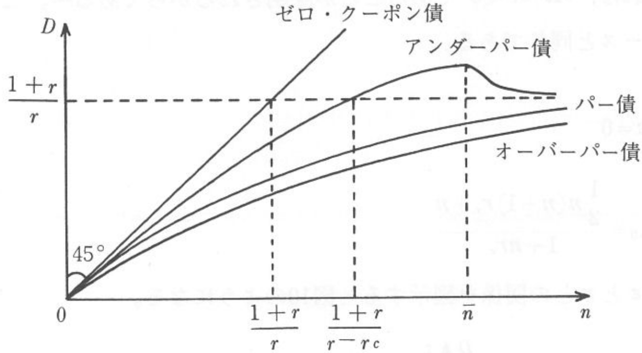
ⓐゼロ・クーポン債の場合には恒等的に1に等しい

ⓑオーバーパー債およびパー債の時には正である

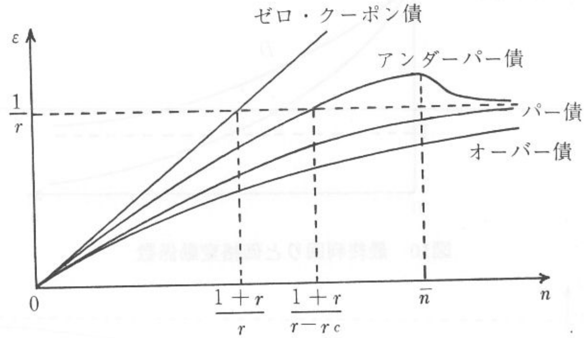
ⓒアンダーパー債の時には n のある特定の値 $\bar{n}$ までは正であるが，それを超えると負になる

ことが知られている[29]。最終利回りが同一で表面利率が異なる債券のデュアレ

29)　証明および詳しい内容については拙稿〔4〕を参照されたい。$\bar{n}$ の値は r_c, r の値によって異なるが，たとえば $r_c=0.05$, $r=0.08$ の場合およそ49期間，$r_c=0.07, r=0.08$ の場合はおよそ121期間である。



(a)　債券タイプとデュアレーション



(b)　債券タイプと価格変動係数

図 9

ーション曲線を図示すると図9—(a)のようになる。従って，価格変動係数 ε と n との関係は $D=D(n)$ のグラフを垂直方向に $1/1+r$ 倍に縮小したグラフになる（図9—(b)）。アンダーパー債を除き，単利方式のケースと同じである。

(2)最終利回り水準の効果

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{D}{1+r}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+r)^2}\left\{\frac{\partial D}{\partial r}(1+r)-D\right\}<0 \qquad (40)$$

なんとなれば，$\partial D/\partial r<0$ であることが証明されるからである[30]。これは単利方式のケースと同じである。

また

$$\lim_{r\to\infty}\varepsilon=0 \tag{41}$$

$$[\varepsilon]_{r=0}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)r_c+n}{1+nr_c} \tag{42}$$

だから，ε と r との関係を図示すると図10のようになる。

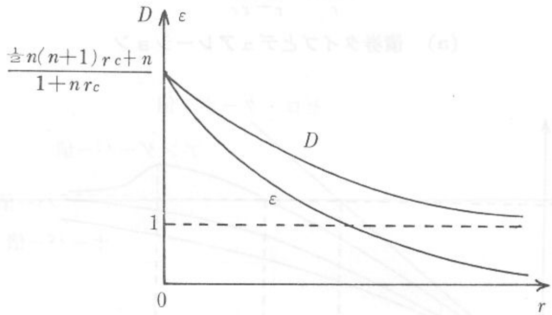
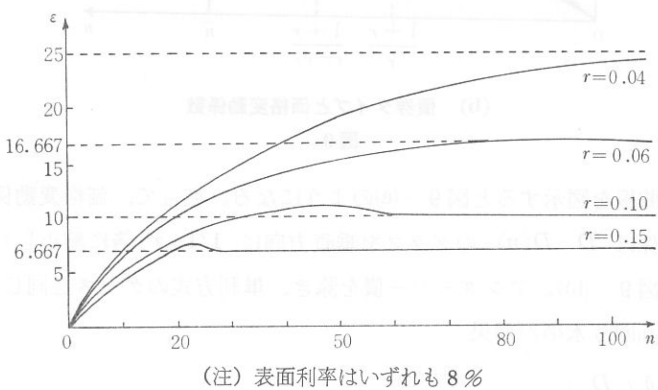


図10　最終利回りと価格変動係数



（注）表面利率はいずれも8％

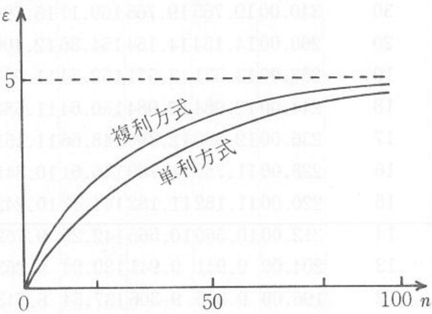
図11　残存期間と価格変動係数（債券タイプ別）

さて，8％クーポン債を例にとり残存期間別そして最終利回り別に価格変動

30）拙稿〔4〕を参照されたい。

係数を算出して作成した一覧表が表６であり，図11はそれを図示したものである。次の諸点がわかる。

価格変動係数の全体としての傾向は，アンダーパー債を除き，当然ながら単利方式のケースと同じである。すなわち，残存期間が長くなる程価格変動係数は大きくなり，次第に $1/r$ に収束する（図11参照）。ここで注意すべきことは，極限値 $1/r$ は最終利回りの大きさに依存するということである。アンダーパー債のケースは，前述のごとく，ある点（$\overline{n}$）までは残存期間とともに価格変動係数の値は大きくなるが，その点を過ぎると逆に小さくなり極限値 $1/r$ に収束する。しかし，最大値 $\overline{\varepsilon}$ の極限値 $\varepsilon^*=1/r$ からの乖離率 $(\overline{n}-n^*)/n^*$ は表６の数値例では小さい[31]。



（注）$r=0.08$.

図12　単利方式と複利方式の比較

ⓑ同じ表面利率，同じ残存期間の債券ならば，最終利回りが低い程価格変動係数の値は大きくなる。アンダーパー債のこぶの部分[32]であっても，より高利回りの債券の価格変動係数を超えることはない。

ⓒ単利方式と複式方式を比較してみると，極限値は $1/r$ で，同じ残存期間であれば複利方式の価格変動係数の値が単利方式の値より大きい（図12参照）。たとえば，８％クーポン債20年物の場合，最終利回りが８％（価格は100）から0.1％（10ベーシス・ポイント）下落すると，新しい価格は複利方式では約98銭１分９厘上がって100.9819円になるが，単利方式では約76銭９分上がって

31）　参考のためにいくつか例を挙げよう。$r=0.08$ とすると $\varepsilon^*=12.5$ である。この時７％クーポン債は $\overline{n}=121$ で $\overline{\varepsilon}=12.500154$，５％クーポン債は $\overline{n}=49.2$ で $\overline{\varepsilon}=12.66405$，１％クーポン債は $\overline{n}=34.7$ で $\overline{\varepsilon}=18,323737$ である。つまり，表面利率が低いと乖離が大きくなる。

32）「こぶの部分」とは極限値 ε^* を上回る価格変動係数の範囲をさす。

表６　最終利回り別・残

n \ r	0％			4％			6％			8％	
	P	D	ε	P	D	ε	P	D	ε	P	D
∞	∞	∞	∞	200.00	26.000	25.000	133.33	17.667	16.667	100.00	13.500
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	900.00	56.000	56.000	198.02	24.740	23.788	133.24	17.553	16.559	100.00	13.494
75	700.00	43.286	43.286	194.72	23.262	22.367	132.91	17.260	16.283	100.00	13.458
50	500.00	30.400	30.400	185.93	20.248	19.469	131.52	16.235	15.316	100.00	13.212
40	420.00	25.143	25.143	179.17	18.327	17.622	130.09	15.324	14.457	100.00	12.879
30	340.00	19.765	19.765	169.17	15.794	15.187	127.53	13.889	13.103	100.00	12.158
20	260.00	14.154	14.154	154.36	12.400	11.923	122.94	11.495	10.844	100.00	10.604
19	252.00	13.571	13.571	152.54	11.997	11.536	122.32	11.182	10.549	100.00	10.372
18	244.00	12.984	12.984	150.64	11.582	11.137	121.66	10.851	10.237	100.00	10.122
17	236.00	12.390	12.390	148.66	11.151	10.722	120.95	10.563	9.965	100.00	9.851
16	228.00	11.789	11.789	146.61	10.341	9.943	120.21	10.135	9.561	100.00	9.559
15	220.00	11.182	11.182	144.47	10.242	9.848	119.42	9.747	9.195	100.00	9.244
14	212.00	10.566	10.566	142.25	9.762	9.387	118.59	9.336	8.808	100.00	8.904
13	204.00	9.941	9.941	139.94	9.263	8.907	117.71	8.904	8.400	100.00	8.536
12	196.00	9.306	9.306	137.54	8.743	8.407	116.77	8.445	7.967	100.00	8.139
11	188.00	8.660	8.660	135.04	8.202	7.887	115.77	7.959	7.508	100.00	7.710
10	180.00	8.000	8.000	132.44	7.637	7.343	114.72	7.444	7.023	100.00	7.247
9	172.00	7.326	7.326	129.74	7.046	6.775	113.60	6.898	6.508	100.00	6.747
8	164.00	6.634	6.634	126.93	6.428	6.181	112.42	6.318	5.960	100.00	6.206
7	156.00	5.923	5.923	124.01	5.778	5.556	111.16	5.701	5.378	100.00	5.623
6	148.00	5.189	5.189	120.97	5.094	4.898	109.83	5.043	4.758	100.00	4.993
5	140.00	4.429	4.429	117.81	4.372	4.204	108.42	4.342	4.096	100.00	4.312
4	132.00	3.636	3.636	114.52	3.607	3.468	106.93	3.592	3.389	100.00	3.577
3	124.00	2.806	2.806	111.10	2.795	2.399	105.35	2.789	2.631	100.00	2.783
2	116.00	1.931	1.931	107.54	1.928	1.854	103.67	1.927	1.818	100.00	1.926
1	108.00	1.000	1.000	103.85	1.000	0.962	101.89	1.000	0.943	100.00	1.000
0.5	104.00	0.500	0.500	101.94	0.500	0.481	100.96	0.500	0.472	100.00	0.500
0.4	103.20	0.400	0.400	101.56	0.400	0.385	100.77	0.400	0.377	100.00	0.400
0.3	102.40	0.300	0.300	101.17	0.300	0.288	100.58	0.300	0.283	100.00	0.300
0.2	101.60	0.200	0.200	100.78	0.200	0.192	100.39	0.200	0.189	100.00	0.200
0.1	100.80	0.100	0.100	100.39	0.100	0.096	100.19	0.100	0.094	100.00	0.100
0	100.00	0.000	0.000	100.00	0.000	0.000	100.00	0.000	0.000	100.00	0.000

（注）　表面利率は８％と仮定。

存期間別の価格変動係数

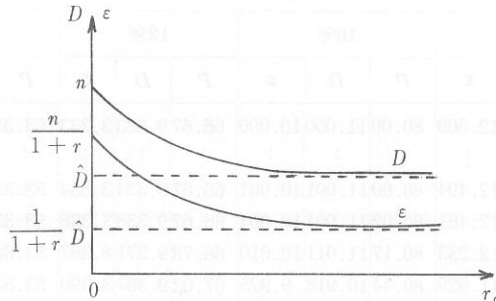
	10%			12%			15%			20%		
ε	P	D	ε	P	D	ε	P	D	ε	P	D	ε
12.500	80.00	11.000	10.000	66.67	9.333	3.333	53.33	7.667	6.667	40.00	6.000	5.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12.494	80.00	11.001	10.001	66.67	9.334	3.334	53.33	7.667	6.667	40.00	6.000	5.000
12.461	80.02	11.004	10.004	66.67	9.338	3.338	53.33	7.668	6.668	40.00	6.000	5.000
12.233	80.17	11.011	10.010	66.78	9.371	8.367	53.38	7.694	6.690	40.01	6.000	5.000
11.925	80.44	10.918	9.925	67.02	9.397	3.390	53.51	7.743	6.733	40.04	6.031	5.026
11.257	81.15	10.647	9.679	67.78	9.366	8.363	54.04	7.844	6.821	40.25	6.126	5.105
9.819	82.97	9.746	8.860	70.12	8.939	7.981	56.18	7.848	6.824	41.57	6.377	5.314
9.604	83.27	9.586	8.715	70.54	8.839	7.891	56.61	7.816	6.797	41.88	6.404	5.337
9.372	83.60	9.408	8.553	71.00	8.723	7.788	57.10	7.770	6.757	42.25	6.427	5.356
9.121	83.96	9.209	8.372	71.52	8.587	7.667	57.67	7.710	6.704	42.70	6.443	5.369
8.851	84.35	8.988	8.171	72.10	8.428	7.525	58.32	7.630	6.635	43.25	6.450	5.375
8.559	84.79	8.741	7.946	72.76	8.245	7.362	59.07	7.528	6.546	43.89	6.443	5.369
8.244	85.27	8.468	7.698	73.49	8.034	7.173	59.93	7.399	6.434	44.67	6.418	5.348
7.904	85.79	8.164	7.422	74.31	7.791	6.956	60.92	7.240	6.296	45.61	6.369	5.308
7.536	86.37	7.827	7.115	75.22	7.513	6.708	62.06	7.044	6.125	46.73	6.288	5.240
7.139	87.01	7.455	6.777	76.25	7.197	6.426	63.36	6.807	5.919	48.08	6.168	5.140
6.710	87.71	7.044	6.404	77.40	6.837	6.104	64.87	6.523	5.672	49.69	6.000	5.000
6.247	88.48	6.590	5.991	78.69	6.431	5.742	66.60	6.187	5.380	51.63	5.775	4.813
5.746	89.33	6.091	5.537	80.13	5.973	5.333	68.59	5.580	4.852	53.95	5.483	4.569
5.206	90.26	5.542	5.038	81.74	5.459	4.874	70.88	5.333	4.637	56.74	5.115	4.263
4.623	91.29	4.940	4.491	83.55	4.886	4.363	73.51	4.804	4.177	60.09	4.663	3.886
3.993	92.42	4.281	3.892	85.58	4.250	3.795	76.53	4.202	3.654	64.11	4.120	3.433
3.312	93.66	3.562	3.238	87.85	3.546	3.166	80.02	3.522	3.063	68.94	3.482	2.902
2.577	95.03	2.777	2.525	90.39	2.771	2.474	84.02	2.762	2.402	74.72	2.747	2.289
1.783	96.53	1.925	1.750	93.24	1.923	1.149	88.62	1.921	1.670	81.67	1.918	1.598
0.926	98.18	1.000	0.909	96.43	1.000	0.893	93.91	1.000	0.870	90.00	1.000	0.833
0.462	99.07	0.500	0.455	98.16	0.500	0.446	96.85	0.500	0.435	94.77	0.500	0.417
0.370	99.25	0.400	0.364	98.52	0.400	0.357	97.46	0.400	0.348	95.78	0.400	0.333
0.278	99.44	0.300	0.273	98.89	0.300	0.268	98.08	0.300	0.261	96.81	0.300	0.250
0.185	99.62	0.200	0.182	99.25	0.200	0.179	98.71	0.200	0.174	97.85	0.200	0.167
0.094	99.81	0.100	0.091	99.62	0.100	0.089	99.35	0.100	0.087	98.92	0.100	0.083
0.000	100.00	0.000	0.000	100.00	0.000	0.000	100.00	0.000	0.000	100.00	0.000	0.000

100.769円となる。換言すれば，一定の価格変動があった時，それに対応する利回り変化は単利方式の方が複利方式より過大に表示されるということである。

③表面利率の効果

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_c}=\frac{1}{1+r}\frac{\partial D}{\partial r_c}<0 \qquad (43)$$

$\frac{\partial D}{\partial r_c}<0$ が成り立つことは容易に証明できる[33)]。単利方式のケースと大きく異なるのは，この表面利率の効果である。単利方式の場合は，利回り変動に対応する価格変動および価格水準に与える表面利率の効果が相殺し合い，その効果はゼロになる（(9)式参照)。図13はデュアレーションおよび価格変動係数と表面利率との関係を図示したものである。表7は最終利回り8％の債券を例にとり，表面利率別・残存期間別に価格変動係数を計算して作成したものである。これから次のことがわかる。



(注) $\hat{D}=\frac{1+r}{r}-\frac{n}{(1+r)^n-1}$

図13　表面利率と価格変動係数

ⓐ表面利率の違いによる価格変動係数の格差は，概して最終利回りの違いによる価格変動係数の格差程大きくない。

ⓑ表面利率の違いによる価格変動係数の格差は残存期間が長くなるに従って小さくなる。たとえば，5％クーポン債と15％クーポン債を比べてみると，残存期間が10年の場合には7.265対6.007であるが，残存期間が100年の場合には12.516対12.478とほとんど等しい。

ところで，表6，7の価格変動係数の数値は最終利回りがほんのわずか変化した時の値であるから，この数値を用いて価格変動率を算出すると，正確な値ではなくその近似値が得られるに過ぎないことは単利方式のケースと同じである。誤差がどの程度の大きさになるかは，単利方式の場合と同様に「誤差率表」

33)　証明については拙稿〔4〕を参照されたい。

表7　表面利率別・残存期間別の価格変動係数

n ＼ r_c	0％		1％		5％		8％		10％		15％		30％		∞	
	D	ε	D	ε	D	ε	D	ε	D	ε	D	ε	D	ε	D	ε
∞	∞	∞	13.500	12.500	13.500	12.500	13.500	12.500	13.500	12.500	13.500	12.500	13.500	12.500	13.500	12.500
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	100.000	92.593	13.768	12.748	13.517	12.516	13.494	12.494	13.486	12.487	13.476	12.478	13.465	12.468	13.455	12.458
75	75.000	69.444	14.771	13.677	13.573	12.568	13.459	12.461	13.420	12.426	13.368	12.378	13.317	12.331	13.266	12.283
50	50.000	46.296	17.990	16.657	13.677	12.664	13.212	12.233	13.055	12.088	12.842	11.891	12.628	11.693	12.411	11.492
40	40.000	37.037	19.488	18.044	13.608	12.600	12.879	11.925	12.627	11.692	12.283	11.373	11.931	11.047	11.570	10.713
30	30.000	27.778	19.478	18.035	13.162	12.187	12.158	11.257	11.797	10.923	11.291	10.455	10.756	9.959	10.190	9.435
20	20.000	18.519	16.244	15.041	11.675	10.810	10.604	9.819	10.182	9.428	9.558	8.850	8.849	8.194	8.037	7.442
19	19.000	17.593	15.709	14.545	11.425	10.579	10.372	9.604	9.953	9.216	9.326	8.635	8.606	7.969	7.770	7.194
18	18.000	16.667	15.137	14.016	11.150	10.324	10.122	9.372	9.707	8.988	9.080	8.407	8.351	7.732	7.492	6.937
17	17.000	15.741	14.528	13.452	10.849	10.045	9.851	9.121	9.443	8.744	8.820	8.167	8.084	7.485	7.204	6.670
16	16.000	14.815	13.884	12.856	10.519	9.740	9.559	8.851	9.160	8.481	8.544	7.911	7.805	7.227	6.905	6.394
15	15.000	13.889	13.205	12.227	10.160	9.407	9.244	8.559	8.857	8.201	8.251	7.640	7.514	6.957	6.594	6.106
14	14.000	12.963	12.494	11.569	9.768	9.044	8.904	8.244	8.531	7.899	7.941	7.353	7.208	6.674	6.273	5.808
13	13.000	12.037	11.751	10.881	9.343	8.651	8.536	7.904	8.182	7.576	7.611	7.047	6.888	6.378	5.940	5.500
12	12.000	11.111	10.979	10.166	8.882	8.224	8.139	7.536	7.806	7.228	7.261	6.723	6.553	6.068	5.596	5.181
11	11.000	10.185	10.178	9.424	8.384	7.763	7.710	7.139	7.401	6.853	6.887	6.357	6.201	5.742	5.240	4.852
10	10.000	9.259	9.351	8.658	7.846	7.265	7.247	6.710	6.966	6.450	6.488	6.007	5.831	5.399	4.871	4.510
9	9.000	8.333	8.499	7.869	7.267	6.729	6.747	6.247	6.496	6.015	6.060	5.611	5.441	5.038	4.491	4.158
8	8.000	7.407	7.625	7.060	6.645	6.153	6.206	5.746	5.989	5.545	5.602	5.187	5.029	4.656	4.099	3.795
7	7.000	6.481	6.729	6.231	5.980	5.537	5.623	5.206	5.441	5.038	5.108	4.730	4.593	4.253	3.694	3.402
6	6.000	5.556	5.814	5.383	5.269	4.879	4.993	4.623	4.847	4.488	4.573	4.234	4.127	3.821	3.276	3.033
5	5.000	4.630	4.881	4.519	4.512	4.178	4.312	3.993	4.204	3.893	3.992	3.696	3.671	3.399	2.847	2.636
4	4.000	3.704	3.931	3.640	3.707	3.432	3.577	3.312	3.504	3.244	3.356	3.107	3.083	2.855	2.404	2.226
3	3.000	2.778	2.967	2.747	2.853	2.642	2.783	2.577	2.742	2.539	2.656	2.459	2.619	2.425	1.949	1.805
2	2.000	1.852	1.989	1.842	1.951	1.806	1.926	1.783	1.911	1.769	1.877	1.738	1.800	1.667	1.481	1.371
1	1.000	0.926	1.000	0.926	1.000	0.926	1.000	0.926	1.000	0.926	1.000	0.926	1.000	0.926	1.000	0.926
0.5	0.500	0.463	0.500	0.463	0.500	0.463	0.500	0.463	0.500	0.463	0.500	0.463	0.500	0.463	0.500	0.463
0.4	0.400	0.370	0.400	0.370	0.400	0.370	0.400	0.370	0.400	0.370	0.400	0.370	0.400	0.370	0.400	0.370
0.3	0.300	0.278	0.300	0.278	0.300	0.278	0.300	0.278	0.300	0.278	0.300	0.278	0.300	0.278	0.300	0.278
0.2	0.200	0.185	0.200	0.185	0.200	0.185	0.200	0.185	0.200	0.185	0.200	0.185	0.200	0.185	0.200	0.185
0.1	0.100	0.093	0.100	0.093	0.100	0.093	0.100	0.093	0.100	0.093	0 100	0.093	0.100	0.093	0.100	0.093
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

（注）　最終利回りは８％と仮定。

を作っておけば便利である。残念なことには，単利方式の場合のように，近似値 $e\Delta r$ から真の値 $e^*\Delta r$ を求める簡便な方法はない。

5　割引債と価格変動率

これまでは利付債を対象に考察してきた。ここでは割引債の価格変動率について吟味する。

割引債の最終利回り計算には単利方式と複利方式があり，わが国では慣習的に

①残存期間1年未満の割引債…単利方式

②残存期間1年以上の割引債…複利方式

を用いる。

⑴単利方式

$$P=\frac{\bar{P}}{1+nr}\quad\left(r=\frac{(\bar{P}-P)/n}{P}\right)\tag{43}$$

わが国では，㋑短期国債，割引金融債，㋺残存期間1年未満の中期割引国債，加入者引受電々債がこの方式を採用している。

⑵複利方式

$$P=\frac{\bar{P}}{(1+r)^n}\quad\left(r=\sqrt[n]{\frac{\bar{P}}{P}}-1\right)\tag{44}$$

年1回利払いを前提とした1年複利である。容易にわかるように，割引債の複利最終利回りは利付債のそれと本質的に同一である―利付債の最終利回り算式において表面利率をゼロとおけば(44)式が得られる。これは，割引債は表面利率がゼロの利付債と考えられるからである。

さて，価格変動率を求めてみる。

⑴単利方式

(43)式を r で微分する。

$$\frac{dP}{dr}=-\frac{\bar{P}n}{(1+nr)^2}$$

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}=-\frac{n}{1+nr} \tag{45}$$

また

$$\frac{dP}{P}=-\frac{n}{1+nr}dr \tag{46}$$

⑵複利方式

複利方式の場合も，同様にして

$$\frac{dP}{dr}=-\frac{\bar{P}n}{(1+r)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}=-\frac{n}{1+r} \tag{47}$$

また

$$\frac{dP}{P}=-\frac{n}{1+r}dr \tag{48}$$

これより割引債の価格変動係数および価格変動率について次のことがわかる。

ⓐ単利方式の場合には価格変動係数および価変格動率とも利付債の場合と同一の式である。

ⓑ複利方式の場合にも利付債の場合と同一である。というのは，割引債のデュアレーションDはその残存期間nに等しい[34]ので，(31)式において$D=n$とおくと(48)式が得られるからである。

〔債券投資の手引き　3〕

割引債は表面利率がゼロの利付債とみなせるから，価格変動係数および価格変動率の計策は利付債と同様に行なえば良い。

たとえば，表3の価格変動係数の数値は表面利率からは独立であるから，割引債にも適用可能である[35]。最終利回り8％で残存期間0.5年の割引債の価格変動係数は，8％クーポン債と同一の0.481である。また，残存期間1年以上

34) Macaulay〔14〕, p. 48，拙稿〔4〕を参照せよ。

35) 表3の「価格P」の数値は表面利率に依存するから，割引債および8％クーポン債以外には適用できない。

の割引債に関しては，表7の $r_c=0$ の欄を見ればよい。

〔債券投資の手引き　4〕

残存期間1年以上の割引債の価格変動係数の値は利付債に比べて大きい。特に，残存期間が長くなる程その格差は急速に拡大していく（図9—(b)参照）。[36]

参考文献

〔1〕 高橋琢磨『現代債券投資分析』日本経済新聞社　1988年8月

〔2〕 大和証券・大和証券経済研究所（編）『債券ディーリングと運用戦略』金融財政事情研究会 昭和59年6月。

〔3〕 土橋敏光「債券利回り諸指標の比較検討—債券ディーリングに向けて—」経済学論集（大阪経済法科大学）12(2)，1989年2月。

〔4〕 ——「デュアレーションについて——その内容・特性・利用法——」研究年報（大阪経済法科大学経済研究所）(8) 1989年10月（予定）。

〔5〕 野村総合研究所（編）『債券運用と投資戦略』金融財政事情研究会 昭和56年7月。

〔6〕 丸 淳子・首藤 恵・小峰みどり『現代証券市場分析』東洋経済新報社　昭和61年6月。

〔7〕 Bernstein, Peter L. (ed.), *The Theory and Practice of Bond Portfolio Management* (Institutional lnvester Systems) 1976.

〔8〕 Bierwag, Gerald O., *Duration Analysis: Managing Interest Rate Risk* (Ballinger Publishing Co.) 1987.

〔9〕 Fisher, Lawrence, "An Algorithm for Finding Exact Rates of Return," *Journal of Businese* 39(1) Part II Jan. 1966, 111-118.

〔10〕 Fong, H. Gifford and Frank J. Fabozzi, *Fixed Income Portfolio Management* (Dow Jones-Irwin) 1985.

〔11〕 Hawawini, Gabriel A. (ed.), *Bond Duration and Immunization* (Garland Publishing Co.) 1982.

〔12〕 Homer, Sidney and Martin L. Leibowitz, *Inside the Yield Book* (Prentice Hall) 1972.

〔13〕 Hopewell, Michael and George G. Kaufman, "Bond Price Volatility and Years to Maturity," *American Economic Review* 63(4), Sept. 1973, 749-753.

〔14〕 Macaulay, Frederick R., *Some Theoretical Problems suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since* 1865 (NBER) 1938.

36) このことは割引債のデュアレーションが残存期間に等しいのに対して，利付債のデュアレーションは残存期間より短かく，そして残存期間が長くなるにつれてその格差が拡大していくことに対応している。(図9—(a)参照)