様相論理における単一化問題について

宮 崎 裕

梗 概

様相論理のおける単一化問題について議論する。特に、推移律を持たないような様相論理のクラスについての単一化問題における単一化のタイプの分類に関する新しい結果が得られたのでそれを紹介する。ここで述べる結果は2011年8月末から9月にかけて筆者がポーランド、シレジエ大学数学研究所の Wojciech Dzik 教授と行った共同研究での成果の一部である。

1．はじめに

古典述語論理の定理自動証明は、現在では導出原理(resolution principle)に基づいておこなわれるのが一般的である。この中で用いられている計算手法が単一化(unification)と呼ばれるものである。実際、Prolog などの論理型プログラム言語ではこの単一化の手続きが重要な役割を果たしている。単一化の手続きは、その他にも定理自動証明を基礎とする証明論や自動推論、項書き換え系などで広く利用されている。

単一化とは、2つの**項**(term)と呼ばれるある代数上の表現を等しくするような、それぞれの項の中にあらわれる変数への一様な**代入演算子**(uniform substitution)を求める手続きのことである。そのような代入演算子は通常複数存在するが、それらのうち**最汎単一化子**(most general unifier or m.g.u.)と呼ばれる代入演算子を求めることが問題となる。普通用いられる上で述べた古典述語論理の場合は、意味論で用いられる代数がブール代数であるために単一化にかかわる問題も比較的容易であるが、非古典論理に対応する代数上での単一化問題はブール代数の場合よりも状況はずっと複雑である。ここでは古典命題論理を拡張した命題様相論理、およびそれに対応する様相代数上での単一化問題について議論する。

単一化の概念がはじめて定式化されたのは、1965年の J.A.Robinson の論文

([9])においてである。この論文で彼は、その導出原理のための基本的な演算として単一化および最汎単一化子の概念を明確に述べ、(古典述語論理において)単一化可能な項の有限集合に対しては常にm.g.u.が存在することを示し、具体的にm.g.u.を計算するアルゴリズムを示した。

Robinsonの導出原理は、先行研究としてPost, Herbrand, Prawitz, Guardらの定理自動証明器に関する研究を持っており、その中でも特にHerbrandの定理([6])は導出原理の直接の基礎となった結果である。しかし彼らの仕事の中では同様のアイディアが用いられているものの、単一化の概念が明確に述べられることはなかった。

一方、別の分野で単一化および最汎単一化子の概念に到達していた研究者もいた。それがKnuthおよびBendixの項書き換え系(Term Rewriting System)の合流性に関する研究([7])である。この論文で彼らは、与えられた等式の有限集合に対して、それらを公理として持つ代数系と等価でありしかも停止性と合流性をもつ項書き換え系を生成するためのアルゴリズムを示した。彼らのアルゴリズム(Knuth-Bendix Completion Algorithm)はいつも成功するとは限らないが、成功した場合には与えられた等式の集合で定義される代数系(variety)の語の問題(word problem)を解くために利用することができる。

これら定理自動証明や項書き換え系での研究とは別に、一般の非古典論理に対して単一化の研究を始めたのがS.Ghilardi ([4], [5])である。彼は直観主義論理やS4, K4, GLなどの命題様相論理について単一化に関するいくつかの結果を示した。我々がここに述べる結果は、このGhilardiに続くものである。

2. 様相論理とは？

日常の生活で使われている論理的な判断や、特に通常の数学の証明に使われている論理を形式化したものに**古典(命題)論理**と呼ばれる論理体系がある。これは命題の内容には重きを置かず、それらをp, q, rなどの命題変数であらわし、いくつかの命題変数を$\wedge$(and), $\vee$(or), $\neg$(not), $\supset$(implies)などの論理結合子でつないで複雑な命題を構成し、ある公理と推論規則を定義してその命題

の真偽をその形から判定するものである。

(命題)様相論理はこの古典論理に必然性をあらわす□(box)および可能性をあらわす◇(diamond)を結合子に加えて古典論理を拡張したものである。様相論理の歴史は古く、ある命題が正しいことと必然的に正しいことを区別したAristotleにまでさかのぼると言われるが、近代的な様相論理はH.McCollに始まり、C.I.Lewisにより現在の形の定式化がなされた。以下に正確な定式化を述べる。命題様相論理の信頼に足る文献としては例えばA.Chagrov, M. Zakharyaschev（[2]）があげられる。

2.1 構文論的な様相論理の定義

まず使用する記号を規定するために言語$\mathcal{L}$(modal language)を定義する。言語は次にあげる記号の集合からなる。

(1) 可算無限個の命題変数: $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \dots$

(2) 論理結合子: $\bot$ (bottom), $\wedge$ (and), $\neg$ (not), $\Box$ (box).

(3) かっこ: (と).

この言語$\mathcal{L}$上の様相論理式の集合Φを次の4つの条件を満たす最小の記号列の集合として定義する。

(1) $\bot \in \Phi$.

(2) 各命題変数pについて$p \in \Phi$.

(3) $\alpha \in \Phi$ ならば $(\neg\alpha), (\Box\alpha) \in \Phi$.

(4) $\alpha, \beta \in \Phi$ ならば $(\alpha \wedge \beta) \in \Phi$.

なお、$\alpha \vee \beta := \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\alpha \supset \beta := (\neg\alpha) \vee \beta$, $(\Diamond\alpha) := \neg(\Box(\neg\alpha))$と略記する。また$\neg, \Box$の方が$\wedge, \vee, \supset$より結合力が強いとして適宜かっこを省略する。

さてこの言語$\mathcal{L}$上の(正規)様相論理(normal modal logic)を次のように定義する。

定義2.1 （正規様相論理）

$\mathcal{L}$上の**(正規)様相論理**とは次を満たすΦの部分集合Lのことである。

(1) Lは古典命題論理のすべてのトートロジーを含む。

(2) L は様相論理式 $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ を含む。

(3) L は次の推論規則で閉じている。

(a) $\alpha, \alpha \supset \beta \in L$ ならば $\beta \in L$.　(三段論法)

(b) $\alpha \in L$ ならば $[\beta / p]\alpha \in L$.　(代入)

(c) $\alpha \in L$ ならば $(\Box \alpha) \in L$.　(必然化)

様相言語 $\mathcal{L}$ における最小の正規様相論理を K であらわす。 ■

ここでは正規な様相論理しか扱わないので正規様相論理のことを単に様相論理、または論理と呼ぶ。また、上にあらわれる代入という演算について説明しておく。論理式 α, β に対して論理式 $[\beta / p]\alpha$ とは論理式 α に含まれるすべての命題変数 p の出現を論理式 β で置き換えて得られる論理式のことである。この代入という演算が単一化を議論する際に重要な役割を果たす。

一般の様相論理 L と論理式の集合 Γ に対して、L と Γ の両方を含む最小の様相論理を $L \oplus \Gamma$ であらわす。このように論理 L に公理として論理式の集合を付け加えて作られる様相論理を L の拡張といい、L の拡張全体のクラスを $NExt(L)$ (the class of all normal extensions of L) とあらわす。

これまでによく知られている様相論理として次のようなものが挙げられる。まず公理として次の論理式を定義する。

$D := \Box p \supset \Diamond p$,　$T := \Box p \supset p$,　$B := p \supset \Box\Diamond p$,　$4 := \Box p \supset \Box\Box p$,
$5 := \Diamond\Box p \supset \Box p$

それぞれの論理式の意味については次の意味論のところで述べる。さて、これらを用いて定義される論理には次のようなものがある。

$KD := K \oplus D$,　$KT := K \oplus T$,　$KB := K \oplus B$,　$KTB := KT \oplus B$,
$K4 := K \oplus 4$,　$K5 := K \oplus 5$,　$S4 := KT \oplus 4$,　$S5 := KT \oplus 5$

これらの様相論理に対しては上のような定義のほかにそれぞれの論理に含まれる論理式を計算するための形式体系が存在する。例として、K の**シークエント計算** (Sequent Calculus for K) における論理式 $\Box(p \wedge q) \supset (\Box p \wedge \Box q)$ の証明図を次に示す。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p}{p \wedge q \to p}}{\Box(p \wedge q) \to \Box p} \qquad \dfrac{\dfrac{q \to q}{p \wedge q \to q}}{\Box(p \wedge q) \to \Box q}}{\Box(p \wedge q) \to \Box p \wedge \Box q}}{\to \Box(p \wedge q) \supset \Box p \wedge \Box q}$$

この場合、論理式φに対し$\varphi \in K$であることとφを一番下の式としたKのシークエント計算の証明図が存在することは同値である。このようにして、一般にある論理Lに対し論理式φのLの体系での証明図を見つけることにより、$\varphi \in L$であることが保証できる。論理式φのLの体系での証明図があることを$L \vdash \varphi$とあらわす。

2.2 様相論理の意味論

次に様相論理式に“意味”を与える仕組みについて述べる。現在の論理学では各論理式の意味を与えるためにある構造を用意し、論理式の各構成子をその構造の中の要素や演算子に写像する付値(valuation)と呼ばれる解釈を考え、最終的に論理式の意味をその構造の中のある要素として求めるという方法をとるのが一般的である。その構造として命題様相論理では様相代数と(クリプキ)フレームを考える。その上で各様相論理Lに対しては、(可能であれば)ちょうどその論理にうまく対応する構造のあるクラスを考え、そのクラスに含まれる任意の構造と、論理式からその構造への任意の付値に対して、ある論理式の解釈が常に1(あるいは構造全体)となるとき、その論理式は恒真であると言う。

様相論理Lにちょうど対応する論理式の解釈のための構造のクラスがうまく取れるとき、恒真な論理式全体がLに一致し意味論が完全であるという。実はこの構造として様相代数を考えるときにはどんな正規様相論理に対しても、必ず完全となる様相代数のクラスがとれるが、クリプキフレームを考えたときには必ずしも完全となるクリプキフレームのクラスがとれるとは限らない。

2.2.1 様相代数とその上での論理式の解釈

まず様相代数を定義する。

定義 2.2（様相代数）

様相代数とは次をみたす構造 $\mathrm{A} = \langle A, \cap, \cup, -, I, 0, 1 \rangle$ のことである。

(1) $\mathrm{A} = \langle A, \cap, \cup, -, 0, 1 \rangle$ はブール代数。すなわち、最大元 1 と最小元 0 をもつ分配束でかつ－はド・モルガン則をみたす否定演算子である。

(2) I は次をみたす 1 項演算子である。

(a) $I(1) = 1$　　(b) $I(x \cap y) = I(x) \cap I(y)$　■

与えられた様相代数 $\mathrm{A} = \langle A, \cap, \cup, -, I, 0, 1 \rangle$ に対して、様相論理式の集合Φから A への**付値**（valuation）を次をみたす写像 v として定義する。

(1) 各命題変数 p について $v(p) \in A$.

(2) $v(\perp) = 0$.

(3) $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \cap v(\beta)$.

(4) $v(\neg \alpha) = -v(\alpha)$.

(5) $v(\Box \alpha) = I(v(\alpha))$.

つまり、命題変数を様相代数のある要素として解釈し、論理結合子については$\perp$を 0 、$\wedge$を$\cap$、$\neg$を－、$\Box$を I で解釈する。これにともない$\vee$は$\cup$で解釈されることになる。

さて、与えられた様相代数Aと論理式の集合Φから A への付値 v に対し、ある論理式αが $v(\alpha) = 1$ をみたすとき論理式αは様相代数Aと付値 v に対して真であるといい、$\langle \mathrm{A}, v \rangle \models \alpha$ とあらわす。C を様相代数のあるクラスとするとき、C の任意の代数AとΦからAへの任意の付値 v に対して $\langle \mathrm{A}, v \rangle \models \alpha$ が成り立つとき、論理式αはCで恒真であるといい、$C \models \alpha$ と書く。

定理 2.3（正規様相論理Kの完全性）

すべての様相代数のクラスをC_Kとおく。任意の様相論理式αに対して $\alpha \in K$ であること $C_K \models \alpha$ とであることとは同値である。　□

K に公理として T や 4 、B を加えた様相論理に対してもそれぞれ次のような様相代数のクラスを考えれば完全性を得ることができる。すなわち

$C_T := \{\mathrm{A} : \text{様相代数} \mid \mathrm{A}\text{は等式}I(x) \cap x = I(x)\text{をみたす。}\}$

$C_4 \coloneqq \{A : 様相代数 \mid A は等式 I(x) \cap I^2(x) = I(x) をみたす。\}$

$C_B \coloneqq \{A : 様相代数 \mid A は等式 x \cap I(-I(-x)) = x をみたす。\}$

とおくと次の定理が成り立つ。

定理 2.4（様相論理 $KT, K4, KB$ の完全性）

任意の様相論理式αに対して

(1) $\alpha \in KT$ であることと $C_T \models \alpha$ であることは同値である。

(2) $\alpha \in K4$ であることと $C_4 \models \alpha$ であることは同値である。

(3) $\alpha \in KB$ であることと $C_B \models \alpha$ であることは同値である。 □

その他公理が２つ以上加わった場合も同様に対応する等式を使って様相代数のクラスを規定し、そのクラスを用いて完全性を示すことができる。このように代数的意味論では公理としての論理式は代数上の等式に変換することができ、同等性を示すことができる。ただし任意の正規様相論理に対して対応する様相代数のクラスが存在することを示すには、ここで紹介していない議論が必要である。

2.2.2 クリプキフレームとその上での論理式の解釈

前にも述べたように様相代数の場合と比べて、クリプキフレームを用いて論理式の意味づけを行う方法は一般には不完全であることが分かっている。しかしクリプキフレームで論理を扱う魅力は論理式のクリプキフレームでの解釈が非常に直観的図式的であることである。まず、クリプキフレームとその上のモデルを定義する。

定義2.5（クリプキフレームとクリプキモデル）

(クリプキ)フレームとは次をみたす構造 $F = \langle W, R \rangle$ のことである。ここでWは空でない点の集合であり、RはW上の２項関係である。フレーム$F = \langle W, R \rangle$上の（クリプキ）モデルとは次の条件をみたす構造 $M = \langle W, R, V \rangle$のことである。ここで$V$は命題変数の集合から$W$の部分集合への写像であり**付値**と呼ばれる。 ■

クリプキモデルを用いて論理式を解釈するには次のようにする。論理式αがモデル$M = \langle W, R, V \rangle$ の点 $a \in W$ で**真**であることを$(M, a) \models \alpha$とあらわす。

論理式がモデルのある点で真であることを次のように定義する。

(0) $(M,a)\not\models\bot$

(1) $(M,a)\models p \quad\Leftrightarrow\quad a\in V(p)$

(2) $(M,a)\models\neg\alpha \quad\Leftrightarrow\quad (M,a)\not\models\alpha$

(3) $(M,a)\models\alpha\wedge\beta \quad\Leftrightarrow\quad (M,a)\models\alpha \text{ and } (M,a)\models\beta$

(4) $(M,a)\models\Box\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \forall b\in W[{}_aR_b \text{ implies } (M,b)\models\alpha]$

(2)と(4)から特に論理式$\Diamond\alpha$の解釈は次のようになる。

(5) $(M,a)\models\Diamond\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \exists b\in W[{}_aR_b \text{ and } (M,b)\models\alpha]$

論理式αがフレーム$F=\langle W,R\rangle$上の任意のモデルMと任意の点$a\in W$で真であるとき、αはMで**恒真**であるといい$F\models\alpha$とあらわす。さらにフレームのあるクラスDについて任意のフレーム$F\in D$で$F\models\alpha$がなりたつときαはDで恒真であるといい$D\models\alpha$とあらわす。

定理2.6（正規様相論理Kのクリプキ意味論に関する完全性）

すべてのクリプキフレームのクラスをD_Kとおく。このとき任意の論理式αに対して$\alpha\in K$であることと$D_K\models\alpha$であることとは同値である。 □

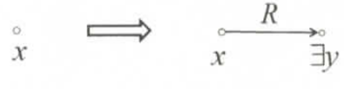
一般に正規様相論理Lに対してあるクリプキフレームのクラスD_Lが存在して、任意の論理式αに対して$\alpha\in L \quad\Leftrightarrow\quad D_L\models\alpha$がなりたつとき$L$はクリプキ完全であるという。実は$NExt(K)$の中にはクリプキ完全でない論理が非可算個存在することが分かっている。

ただし、全体からすると非常にまれであるがいくつかの論理式に対してはフレームの上での非常に直観的で美しい特徴づけが得られている。先にあげた5つの論理式(公理) $D, T, B, 4, 5$ に対しては次のような特徴づけがある。

$D := \Box p\supset\Diamond p$

$\langle W,R\rangle\models D \quad\Leftrightarrow\quad \langle W,R\rangle\models\forall x\in W,\exists y\in W[xRy]$

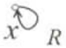
(継続的,serial)



$$T := \Box p \supset p$$

$$\langle W, R \rangle \models T \quad \Leftrightarrow \quad \langle W, R \rangle \models \forall x \in W \left[xRx \right]$$

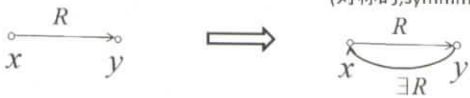
(反射的,reflexive)



$$B := p \supset \Box \Diamond p$$

$$\langle W, R \rangle \models B \quad \Leftrightarrow \quad \langle W, R \rangle \models \forall x \in W, \forall y \in W \left[xRy \textit{ implies } yRx \right]$$

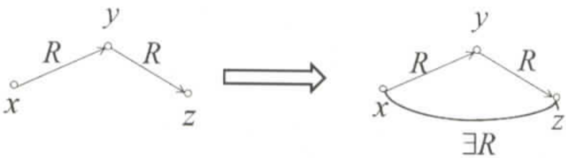
(対称的,symmmetric)



$$4 := \Box p \supset \Box\Box p$$

$$\langle W, R \rangle \models 4 \quad \Leftrightarrow \quad \langle W, R \rangle \models \forall x, y, z \in W \left[(xRy \textit{ and } yRz) \textit{ implies } xRz \right]$$

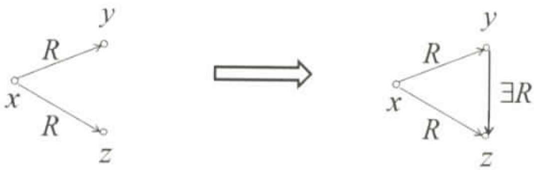
(推移的,transitive)



$$5 := \Diamond\Box p \supset \Box p$$

$$\langle W, R \rangle \models 5 \quad \Leftrightarrow \quad \langle W, R \rangle \models \forall x, y, z \in W \left[(xRy \textit{ and } xRz) \textit{ implies } yRz \right]$$

(ユークリッド的,euclidean)



これらの事実により、例えば様相論理 $K4$ はすべての推移的(transitive)なクリプキフレームのクラスについて完全であることが証明できる。また様相論理 KT はすべての反射的なクリプキフレームのクラスについて完全であることが証明できる。その他の公理から定義される様相論理についても同様である。

クリプキフレームの不完全さを補うために一般フレーム(general frame)という構造が考えられている。**一般フレーム**とは次をみたす構造 $G=\langle W,R,P\rangle$ のことである。ここで $\langle W,R\rangle$ はクリプキフレームであり、P は W の部分集合の族で集合演算 $\cap$ (交わり)と $-$ (補集合)、それに次の演算 I_R で閉じているものである。

$I_R(X) := \{x \in W \mid \forall y \in W (xRy \Rightarrow y \in X)\}.$

一般フレームを考えると確かに任意の様相論理に対して完全性は回復するが、これは実は様相代数と本質的に同じものであり、何か新しい機構がはたらいているわけではない。

3．単一化とは？

はじめにも述べた通り、単一化とは、2つの項(term)と呼ばれるある代数上の表現を等しくするような、それぞれの項の中にあらわれる変数への一様な代入演算子(uniform substitution)を求める手続きのことである。2つの項が等しいかどうかを決める基準の選び方によって、**構文的単一化**(syntactic unification)と**等式的単一化**(equational unification, E-unification)の2種類がある。前者は2つの項の見た目が(つまり記号の並び)が同じ時に等しいとし、後者はある論理 L の上で考え、2つの項 s と t が等しいという等式 $s \equiv_L t$ が L で証明できる時に等しいと考える。ここでは様相論理における単一化の問題を考えているため、等式的単一化について説明する。

命題様相論理を考える場合、意味論のところで述べたとおり論理を考えることはその論理が規定している等式から決まる様相代数のクラスを考えることと同値である。一般に、項という表現は**項代数**(term algebra)という代数上の要素であるのだが、今の場合、項代数としての様相代数上の項を考える代わりに、対応する様相論理での論理式を考えてよい。そして項への代入は論理式への代入と同じものを考えればよい。

3.1 単一化と最汎単一化子

ある様相論理を考える。2つの論理式 α,β に対して新しい論理式をあらわ

す記号 $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$ を導入する。ある代入 θ が論理式 α, β の**単一化子**(unifier)であるとは、$L \vdash \theta\alpha \leftrightarrow \theta\beta$ がなりたつことをいう。またそのような代入が存在するとき論理式 α, β は**単一化可能である**という。例として $\alpha = p \wedge q$, $\beta = \Box p$ を考える。代入 θ を $\theta = [\neg \bot / p, \neg \bot / q]$ とすると、$\theta\alpha = (\neg \bot) \wedge (\neg \bot) = \neg \bot, \theta\beta = \Box(\neg \bot) = \neg \bot$ より、確かに任意の正規様相論理 L で $L \vdash \theta\alpha \leftrightarrow \theta\beta$ である。よって α と β は単一化可能であり、θ はその単一化子である。

さて、2つの論理式 α, β を決めるときそれらを単一化する代入は一般には複数存在する。例えば、論理式 $p \wedge q$ と r に対して $\theta_1 = [\bot / p, \bot / q, \bot / r]$ と $\theta_2 = [p / p, p / q, p / r]$ は異なる単一化子である。実際、$\theta_1(p \wedge q) = \bot \wedge \bot = \bot, \theta_1(r) = \bot$ であり、$\theta_2(p \wedge q) = p \wedge p = p, \theta_2(r) = p$ である。ここで新しい代入 $\tau = [\bot / p]$ を考えると $\tau \circ \theta_2 = \theta_1$ がなりたつことが分かるだろう。(代入の合成は後で行う代入を左に書く)つまり、θ_2 は θ_1 に較べてより一般的な代入であるといえる。2つの代入演算子 σ, τ に対して $\mu \circ \sigma = \tau$ をみたすような代入 μ が存在するとき、σ は τ よりも一般的であるといい $\tau \prec \sigma$ とかく。$\prec$ は擬順序である。つまり反射的かつ推移的である。一方で、単一化が不可能な論理式の対のあることに注意しよう。例えば論理式 $p \wedge \neg p$ と $q \vee \neg q$ はどのような代入を考えても単一化はできない。

単一化が可能である論理式の対(または一般には有限個の論理式の対の集合)に対して $\prec$ の意味で最も一般的な単一化子を求めるのが単一化問題である。以下、単一化問題の定式化と論理に対する単一化のタイプの定義は W.Dzik [3] による。

3.2 単一化のタイプ(Unification Type)

様相論理 L を考える。この時、有限個の論理式の対の集合：

$$\Pi_L(\underline{x}): \quad (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots\ldots, (\alpha_n, \beta_n)$$

を L における**単一化問題**という。ここで $\underline{x}$ は有限個の論理式の対の中にあらわれるすべての命題変数の有限集合である。つまり問題 $\Pi_L(\underline{x})$ とは、$L \vdash \theta\alpha_1$

$\leftrightarrow \theta\beta_1$，$L \vdash \theta\alpha_2 \leftrightarrow \theta\beta_2$，…，　$L \vdash \theta\alpha_n \leftrightarrow \theta\beta_n$ をみたすような代入θを求めることである。

$\Pi_L(\underline{x})$ のすべての単一化子の集合を$U_L(\Pi)$とおく。$U_L(\Pi)$ が空でない時、問題 $\Pi_L(\underline{x})$ は単一化可能であるという。その部分集合 $U \subseteq U_L(\Pi)$ について、Uが**完全**であるとは、任意の $\theta \in U_L(\Pi)$に対してある$\sigma \in U$ があって$\theta \prec \sigma$ がなりたつことをいう。さらに完全な$U \subseteq U_L(\Pi)$ が**極小完全**であるとは、任意の異なる$\mu, \nu \in U$ に対してμとνが$\prec$の意味で比較不可能であることをいう。$\Pi_L(\underline{x})$ の単一化子$\sigma \in U_L(\Pi)$ が**最汎単一化子**(most general unifier, m.g.u)であるとは、部分集合 $\{\sigma\} \subseteq U_L(\Pi)$ が完全であることをいう。

様相論理Lを固定し、単一化可能な単一化問題$\Pi_L(\underline{x})$をとるとき、その極小完全な単一化子の集合 $U \subseteq U_L(\Pi)$ は一意に定まる。そのUの濃度が1か、ω(有限)か、∞(無限)か、0かによって論理Lでの単一化問題のふるまいを次の4つに分類することができる。まず

単一化可能な単一化問題 $\Pi_L(\underline{x})$ について:

- $\Pi_L(\underline{x})$ がタイプ1であるとは$\Pi_L(\underline{x})$ の極小完全な単一化子集合の濃度が1であること。
- $\Pi_L(\underline{x})$ がタイプωであるとは$\Pi_L(\underline{x})$ の極小完全な単一化子集合の濃度がωであること。
- $\Pi_L(\underline{x})$ がタイプ∞であるとは $\Pi_L(\underline{x})$の極小完全な単一化子集合の濃度が∞であること。
- $\Pi_L(\underline{x})$ がタイプ0であるとは、$\Pi_L(\underline{x})$ の極小完全な単一化子集合の濃度が0であること。

と定義する。その上で、様相論理Lの単一化のタイプ(unification type)が:

- 1　(unitary)であるとはLにおける任意の単一化可能な単一化問題がタイプ1であること。
- ω (finitary)であるとはLにおける任意の単一化可能な単一化問題がタイプ1またはωであり、かつある単一化可能な単一化問題のタイプがωであること。
- ∞ (infinitary)であるとはLにおける任意の単一化可能な単一化問題がタイプ

1またはωまたは∞であり、かつある単一化可能な単一化問題のタイプが∞であること。

- 0（nullary）であるとは、ある単一化可能な単一化問題のタイプが0であること。

と定義する。論理Lに対する自動推論システムを考える場合、単一化のタイプが1，ω，∞，0と変わっていくごとに一般的な単一化子を求めることが困難になっていき、だんだん状況が悪くなっていく。

以下で、様相論理Lでの単一化のタイプを考えるとき、$\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$ が論理式であることを考えると、単一化問題として論理式の対(α, β)の単一化ではなくLで充足可能な論理式φに対して$L \vdash \theta\varphi$をみたす代入θを探す問題として考えてもよいことに注意する。

4．推移律を持たない様相論理における単一化問題

命題様相論理の意味論的な研究は、推移律の公理$4 := \Box p \supset \Box\Box p$を持っている論理についてはいくつかの解析手法が開発され、多くの美しい研究成果が得られているが、推移律を持たない論理についての研究はまだそれほど発展しているとはいえない。

様相論理に関する単一化問題はまだ歴史も浅くそれほど発展してはいないが、それでも公理4を持つ論理のいくつかは単一化タイプが決定されている：

タイプ1：$S4.2 = S4 \oplus \Diamond(p \wedge \Box q) \supset \Box(p \vee \Diamond q)$,
$S4.2Grz = S4.2 \oplus \Box(\Box(\Box p \supset \Box p) \supset p) \supset p$.

タイプω：$S4, K4, GL = K4 \oplus \Box(\Box p \supset p) \supset \Box p, S4.1 = S4 \oplus \Box\Diamond p \supset \Diamond\Box p$,
$S4Grz = S4 \oplus \Box(\Box(\Box p \supset \Box p) \supset p) \supset p$.

それに対して推移律の公理4を持たない様相論理の単一化問題に対しては今のところ多くの基本的な問題が未解決のままである。ここでは様相論理KTBとその正規拡大全体のクラス$NExt(KTB)$を考え、単一化の観点からみたその中の様子について議論する。

4.1 様相論理 $KTBAlt(3)$ とそのフレーム

KTB 上の様相論理である $L_0 = KTBAlt(3) = KTB \oplus Alt(3)$ を考える。ここで $Alt(3) = \Box p_0 \vee \Box(p_0 \supset p_1) \vee \Box((p_0 \wedge p_1) \supset p_2) \vee \Box((p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \supset p_3)$ であり、(一般) フレーム $F = \langle W, R, P \rangle$ に対して次のような意味を持つ。

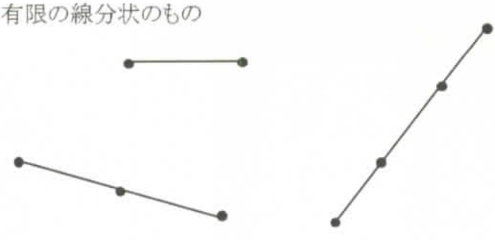
$$F \models Alt(3) \quad \Leftrightarrow \quad F \models \forall x, y, z, u, v \in W[(xRy,\ xRz,\ xRu,\ xRv) \Rightarrow (y = z) or (y = u) or (y = v) or (z = u) or (z = v) or (u = v)]$$

つまり、任意の点から R で到達できる異なる点は高々 3 個しかないことをフレームに要請する。KTB のフレームは反射的かつ対称的であるから、$L_0 =$ $KTBAlt(3)$ のフレームは決して 3 つに分岐している箇所をもたない。L_0 を恒真にするようなすべての一般フレームのクラスを D_0 と書く。D_0 は以下の図のようなメンバーからなる。図の中で反射的な点を●で、また対称的である関係を両向き矢印でなく単に実線――であらわす。

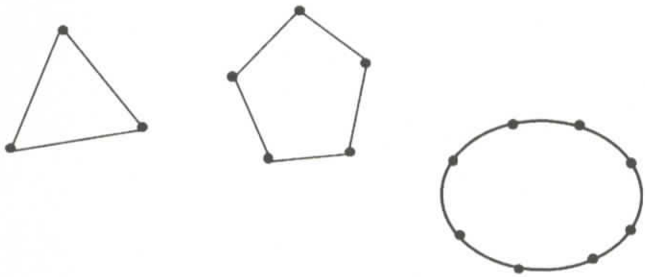
F_0: 両側が無限にのびているもの

F_1: 片側だけが無限にのびているもの

有限の線分状のもの



有限のループ状のもの



ここで２つの一般フレームの間の写像の一種である p-モルフィズムを定義しておく。

定義4.1（p-モルフィズム）

$F=\langle W,R,P\rangle$ および $G=\langle U,S,Q\rangle$ を一般フレームとする。このときWからUへの写像 $f:W\to U$ がFからGへの **p-モルフィズム**であるとは次の条件をみたすこと。

(1) f は全射である。

(2) 任意の $x,y\in W$ に対して xRy ならば $f(x)Sf(y)$ がなりたつ。

(3) 任意の $x\in W$ と $a\in U$ に対して $f(x)Sa$ ならばある $z\in W$ があって $f(z)=a$ かつ xRz がなりたつ。

(4) 任意の $X\in Q$ に対して $f^{-1}(X):=\{x\in W\mid f(x)\in X\}\in P$ がなりたつ。■

FからGへの p-モルフィズム f が存在するとき、FおよびGから定まる様相論理 $L(F),L(G)$ について $L(G)\subseteq L(F)$ がなりたつことが重要である。

命題4.2

任意の $G\in D_0$ に対して G から F_0 への p-モルフィズム f が存在する。したがって $L_0=KTBAlt(3)=L(F_0)$ である。 □

4.2 $L_0=KTBAlt(3)$ の有限モデル性

様相論理Lが**有限モデル性**をもつとは、Lに対してある有限のクリプキフレームのクラスDがあって $L=\bigcap_{F\in D}L(F)$ と書けることである。つまり $\varphi\notin L$

のとき、ある有限のフレームFとF上の付値Vと点aがあって$(\langle F,V\rangle,a)\not\models\varphi$とあることをいう。ここでは様相論理$L_0$が有限モデル性を持つことを示す。

まずクリプキフレームF_0が次のように定式化されることに注意する。すなわち、$F_0=\langle Z,R\rangle$、ここでZは整数の集合であり、関係Rは$nRm\Leftrightarrow|n-m|\le 1$で定められる。次に様相論理式$\varphi$に対し$\varphi$の**長さ**$\deg(\varphi)$を次のように帰納的に定義する。すなわち、

(1) $\deg(\perp)=\deg(p)=0$

(2) $\deg(\neg\varphi)=\deg(\varphi)$

(3) $\deg(\alpha\wedge\beta)=\max\{\deg(\alpha),\deg(\beta)\}$

(4) $\deg(\Box\varphi)=\deg(\varphi)+1$

補題 4.3

任意の論理式φについて$\varphi\notin L_0$とする。このときL_0のある有限フレームFがあって$F\not\models\varphi$がなりたつ。

[証明]　$n=\deg(\varphi)$とおく。$\varphi\notin L_0$より$F_0=\langle Z,R\rangle$のある付値Vがあって、特に$0\in Z$で$(\langle F_0,V\rangle,0)\not\models\varphi$であったとしてよい。$L_0$のある有限フレーム$G$を次のように定義する。

$G=\langle[\overline{-n},\overline{n}],S\rangle$、ただし$\overline{x}S\overline{y}\Leftrightarrow|\overline{x}-\overline{y}|\le 1$であり$\overline{x}$は$F_0$における$x\in Z$に対応する$G$の点をあらわす。$G$上の付値$U$を次のように定める: $\overline{x}\in U(p)\Leftrightarrow x\in V(p)$。このとき次の$(^*)$を示すことができる。

$(^*)$ φの任意の部分論理式ψ（当然$m=\deg(\psi)\le n$）とF_0の任意の点

$x\in[-(n-m),(n-m)]$に対して、$(\langle F_0,V\rangle,x)\models\psi \quad\Leftrightarrow\quad (\langle G,U\rangle,\overline{x})\models\psi$

$(^*)$の証明はmとψの構成に関する二重帰納法による。

$(Case\ m=0)$　ψの構成に関する帰納法。

$\psi\equiv\perp$のとき: 明らか。

$\psi\equiv p$のとき: Uの定義から$x\models p\ in\ \langle F_0,V\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \overline{x}\models p\ in\ \langle G,U\rangle$。

$\psi\equiv\neg\sigma$のとき: $x\models\neg\sigma \quad\Leftrightarrow\quad x\not\models\sigma \quad\Leftrightarrow\quad \overline{x}\not\models\sigma \quad\Leftrightarrow\quad \overline{x}\models\neg\sigma$。

$\psi\equiv\sigma\wedge\tau$のとき: $x\models\sigma\wedge\tau \quad\Leftrightarrow\quad x\models\sigma\ and\ x\models\tau$

$\quad\Leftrightarrow\quad \overline{x}\models\sigma\ and\ \overline{x}\models\tau \quad\Leftrightarrow\quad \overline{x}\models\sigma\wedge\tau$。

$\psi\equiv\Box\sigma$は起こらない。

$(Case\ m = k \geq 1)$ ψ の構成に関する帰納法。

$\psi \equiv \neg\sigma$ および $\sigma \wedge \tau$ のとき:上と同様に示せる。

$\psi \equiv \Box\sigma$ のとき: $\forall x \in [-(n-k),(n-k)]$ に対して、$(\langle F_0,V\rangle,x) \models \Box\sigma$とする。$\bar{x}S\bar{y}$をみたす任意の$\bar{y}$に対して$xRy$であり、$(\langle F_0,V\rangle,y) \models \sigma$ がなりたつ。いま $\deg(\sigma)=k-1$ であり、$\bar{y} \in [\overline{-(n-(k-1))},\overline{(n-(k-1))}]$ であるから帰納法の仮定より $(\langle G,U\rangle,\bar{y}) \models \sigma$ 、したがって $(\langle G,U\rangle,\bar{x}) \models \Box\sigma$ 。逆に $\forall\bar{x} \in [\overline{-(n-k)},\overline{(n-k)}]$ に対して $(\langle G,U\rangle,\bar{x}) \models \Box\sigma$ とする。xRyをみたす yを任意に取るとき $\bar{x}S\bar{y}$ であり、$(\langle G,U\rangle,\bar{y}) \models \sigma$ がなりたつ。いま $\deg(\sigma)=k-1$ であり、$y \in [-(n-(k-1)),(n-(k-1))]$ がいえるから、帰納法の仮定より $(\langle F_0, V\rangle,y) \models \sigma$。したがって $(\langle F_0,V\rangle,x) \models \Box\sigma$ がなりたつ。　(*)の証明終わり.

さて、(*)より特に$\psi \equiv \varphi$とすれば、$(\langle F_0,V\rangle,0) \not\models \varphi$ から$(\langle G,U\rangle,\bar{x}) \not\models \varphi$ が導かれる。 □

定理 4.4（L_0の有限モデル性）

L_0 は有限モデル性を持つ。 □

4.3 L_0のプレ弱推移性

公理$4^m = \Box^m p \supset \Box^{m+1} p$を**弱推移性**(weak transitivity)**の公理**といいこの公理を含む様相論理は**弱推移的**(weakly transitive)であるという。ここで見るようにL_0はそれ自体は弱推移的ではないがL_0の真の拡大はすべて弱推移的である。**プレ弱推移性**とはこの性質を指す。

定理 4.5（M. Byrd [1]）

L_0より真に大きい任意の様相論理Lに対し、ある自然数mがあって$\Box^m p \supset \Box^{m+1} p \in L$ をみたす。

[証明] $L_0 \subset L\ (L_0 \neq L)$ である様相論理Lを任意にとる。このとき$\alpha \in L - L_0$ である論理式α が存在する。$\alpha \notin L_0$ より$F_0 = \langle Z,R\rangle$ のある付値Vとある点$a \in Z$ があって $(\langle F_0,V\rangle,a) \not\models \alpha$ 。

$n = \deg(\alpha)$ とおく。ここで次のことを示す。

(#) Lの任意のフレームGに対して、$G \models \alpha$ ならば $G \models \Box^{2n-1} p \supset \Box^{2n} p$。

(#)の証明: L のフレームGを任意にとって$G \not\models \Box^{2n-1} p \supset \Box^{2n} p$とする。こ

のときフレームGは長さが最低でも$2n$のパス（その上に少なくとも$2n+1$個の点を持つような道）を持つ。すると補題4.2と同様の議論から$G \not\models \alpha$であることが導ける。 □

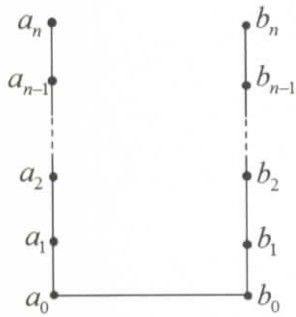
4.4 L_0の単一化のタイプが1でないこと

次の条件をみたす論理式αを考える。

(1) $\deg(\alpha) = n$

(2) 反射的なただ1つの点aからなるフレーム$G_a = \langle \{a\}, R \rangle$上のある付値$V_a$に対して$(\langle G_a, V_a \rangle, a) \models \alpha$。

(3) 反射的なただ1つの点bからなるフレーム$G_b = \langle \{b\}, R' \rangle$上のある付値$V_b$に対して$(\langle G_b, V_b \rangle, b) \models \neg\alpha$。



このとき、右の図のようなフレーム$G_n = \langle W, S \rangle$を考え、$G_n$上の付値$U_n$を次のように定義する。

$0 \leq i \leq n$をみたすiと命題変数p, qについて

$(\langle G_n, U_n \rangle, a_i) \models p \quad \Leftrightarrow \quad (\langle G_a, V_a \rangle, a) \models p$

$(\langle G_n, U_n \rangle, b_i) \models q \quad \Leftrightarrow \quad (\langle G_b, V_b \rangle, b) \models q$

以上の状況において次の補題を示す。

補題 4.6

(1) αの任意の部分論理式β（ただし$\deg(\beta) = m \leq n$）と任意の$i \in [m, n]$に対して

$(\langle G_n, U_n \rangle, a_i) \models \beta \quad \Leftrightarrow \quad (\langle G_a, V_a \rangle, a) \models \beta$

(2) $\neg\alpha$の任意の部分論理式γ（ただし$\deg(\gamma) = m \leq n$）と任意の$i \in [m, n]$に対して

$(\langle G_n, U_n \rangle, b_i) \models \gamma \quad \Leftrightarrow \quad (\langle G_b, V_b \rangle, b) \models \gamma$

［証明］ (1)のみ示す。((2)も全く同様にできる。)

mとβの構成に関する二重帰納法による。

($Case\ m = 0$)　βの構成に関する帰納法。

$\beta \equiv \bot, p, \neg\sigma, \sigma \wedge \tau$ のとき：やさしい。

$\beta \equiv \Box\sigma$ は起こらない。

$(Case\ m = k \geq 1)$ β の構成に関する帰納法。

$\beta \equiv \neg\sigma$ および $\sigma \wedge \tau$ のとき：上と同様に示せる。

$\beta \equiv \Box\sigma$ のとき：

$\forall i \in [k,n]$ に対して、$(\langle G_n, U_n \rangle, a_i) \models \Box\sigma$ とする。$a_i Sy$ をみたす任意の y に対して $(\langle G_n, U_n \rangle, y) \models \sigma$、である。$y = a_j$ とおく。$i-1 \leq j \leq i+1$ より $0 \leq k-1 \leq i-1 \leq j \leq n+1 = n$。一方 $\deg(\sigma) = k-1$ である。フレーム G_a においてaRxとなる x を任意にとるともちろん $x = a$ より帰納法の仮定から $(\langle F_a, V_a \rangle, a) \models \sigma$ がなりたつ。

よって $(\langle F_a, V_a \rangle, a) \models \Box\sigma$。逆に $(\langle F_a, V_a \rangle, a) \models \Box\sigma$ とする。a は反射的より $(\langle F_a, V_a \rangle, a) \models \sigma$。任意の $i \in [k,n]$ と $a_i Sy$ をみたす任意の y をとり $y = a_j$ とおくと $k-1 \leq j \leq= n$ であり $\deg(\sigma) = k-1$ である。よって帰納法の仮定から $(\langle G_n, U_n \rangle, y) \models \sigma$ がいえるので $(\langle G_n, U_n \rangle, a_i) \models \Box\sigma$ が結論される。 □

反射的なただ1つの点からなるフレームで特徴づけられる様相論理を $Triv$ とかく。つまり $Triv = L(\bullet)$ である。

定理 4.7

α を論理式とする。このときすべての自然数 k について $L_0 \vdash \neg\alpha \vee \Box^k \alpha$ がなりたつならば $Triv \vdash \alpha$ または $Triv \vdash \neg\alpha$ がなりたつ。

[証明] $\deg(\alpha) = n$ とおく。$\alpha \notin Triv$ かつ $\neg\alpha \notin Triv$ と仮定する。するとこのとき補題4.5の条件がすべてみたされているから、フレーム G_n で特に $i = n$ として $(\langle G_n, U_n \rangle, a_n) \models \alpha$ および $(\langle G_n, U_n \rangle, b_n) \models \neg\alpha$ がなりたつ。したがって $(\langle G_n, U_n \rangle, a_n) \models \alpha \wedge \Diamond^{2n+1} \neg\alpha$、つまり $(\langle G_n, U_n \rangle, a_n) \not\models \neg\alpha \vee \Box^{2n+1}\alpha$ がいえる。

□

命題 4.8

正規様相論理 L について次の2つは同値である。

(1) すべての自然数 k について $L \vdash \neg\alpha \vee \Box^k \alpha$ がなりたつならば、$Triv \vdash \alpha$

または $Triv \vdash \neg\alpha$ がなりたつ。

(2) $L \vdash \neg\alpha \vee \Box\alpha$ がなりたつならば、$Triv \vdash \alpha$ または $Triv \vdash \neg\alpha$ がなりたつ。

[証明] (2) ならば (1) は明らか。(1) から (2) の証明も L が正規であることから明らかである。 □

定理 4.9

様相論理 L_0 の単一化のタイプは 1 ではない。

[証明] L_0 の単一化のタイプが 1 であると仮定する。論理式 $\beta = \neg p \vee \Box p$ を考える。この β は次の 2 つの代入で単一化可能である。すなわち $\sigma_0 = [\bot / p]$ と $\sigma_1 = [\neg\bot / p]$ 。仮定から論理式に対して m.g.u. σ が存在し、したがって $L_0 \vdash \neg\sigma p \vee \Box\sigma p$ がなりたつ。補題 4.6 命題 4.7より①: $Triv \vdash \sigma p$ または②: $Triv \vdash \neg\sigma p$ がなりたつはずである。①のとき m.g.u. の定義からある代入 θ_0 があって $\sigma_0 = \theta_0 \circ \sigma$ 。すると①から $Triv \vdash (\theta_0 \circ \sigma)p$ 。しかしこれは $Triv \vdash \bot$ を意味するので矛盾。②のとき同じく代入 θ_1 があって $\sigma_1 = \theta_1 \circ \sigma$ 。すると②から $Triv \vdash \neg(\theta_1 \circ \sigma)p$ 。しかしこれも $Triv \vdash \bot$ を意味するので矛盾。したがって L_0 の単一化のタイプは 1 ではない。 □

系 4.10

$L \subseteq L_0$ をみたす任意の正規様相論理 L について、L の単一化のタイプは 1 ではない。

[証明] 定理 4.6の証明は $L \subseteq L_0$ をみたす任意の様相論理 L においても正しい。命題 4.7はすべての正規様相論理でなりたつ。 □

4.5 $NExt(KTB)$ において単一化タイプが 1 であることと弱推移性が同値であること

$NExt(KTB)$ において弱推移性を持てば、単一化のタイプが 1 であることはよく知られた結果である。

定理 4.11

任意の様相論理 $L \in NExt(KTB)$ に対して、ある自然数 m に対してが $L \vdash \Box^m p \supset \Box^{m+1} p$ なりたつならばの単一化のタイプは 1 である。 □

問題はこの逆を示すことである。まず次の事実を確認する。

命題 4.12

$L_0 = L(F_1)$

[証明] 命題 4.2より $L_0 = L(F_0)$ であり、また $L(F_0) \subseteq L(F_1)$ であることがいえている。ここでは補題 4.3にあるように $F_0 = \langle Z, R \rangle$ と定式化される。一方 F_1 は $F_1 = \langle N, S \rangle$ のように定式化される。ここで N は自然数の集合であり関係 S は $x\,S\,y \Leftrightarrow |x-y| \leq 1$ と定義される。ここで補題 4.3と同様の議論から、任意の論理式 φ に対して $F_0 \not\models \varphi$ ならば $F_1 \not\models \varphi$ が導かれ、よって $L(F_1) \subseteq L(F_0)$ である。 □

つまり L_0 はフレーム F_1 によっても特徴づけられることがわかる。これより KTB の弱推移的でない任意の一般フレーム G について、G によって定まる様相論理は $L_0 = KTBAlt(3)$ より下に位置することが次のようにして示せる。一般フレーム $G = \langle W, R, P \rangle$ について G が**連結**であるとは $\forall x, y \in W, \exists m \geq 0 (xR^m y)$ がなりたつことである。つまりフレームが連結であるとは G のどのようなの2点をとってもその2点をつなぐ R による有限の長さのパスが存在することをいう。

補題 4.13

$G = \langle W, R, P \rangle$ を KTB の連結な一般フレームで、任意の $k \geq 0$ に対し $G \not\models \Box^k p \supset \Box^{k+1} p$ であるとする。このとき G から $F_1 = \langle N, S \rangle$ への p-モルフィズムが存在する。

[証明] $X \in P$ が G の**核**(core)であることを次がなりたつことと定義する:

(1) $X \neq \phi$

(2) $\forall x \in X, \exists y \in -X (xRy)$

今の場合、確かに G の核が存在する。([10]を参照されたい。) P の要素の無限列 $\{D_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq P$ を次のように定義する。

$$D_0 := Z, \qquad D_{k+1} := \{y \in W \mid xRy \quad \text{for some} \quad x \in D_k\} - \bigcup_{i=0}^{k} D_i$$

G は弱推移的でないので $D_m = \phi$ をみたす m は存在しない、つまり $\{D_k\}_{k=0}^{\infty}$ は確かに無限列である。また $\bigcup_{i=0}^{\infty} D_i = W$ である。ここで G から $F_1 = \langle N, S \rangle$ への写像 $f : W \to N$ を次のように定義する:

各 $x \in D_k$ に対して $f(x) := k$ 。

この f は G から F_1 への p-モルフィズムであることが容易に示せる。 □

以上のことから次の定理が導かれる。

定理 4.14

L の任意の正規拡大 L について L が弱推移性をもたないならば、$L \subseteq L_0$ でありしたがって L の単一化のタイプは 1 でない。 □

系 4.15

任意の $L \in NExt(KTB)$ に対して次の 4 つの性質は同値である。

(1) L は弱推移的である。

(2) L は semisimple である。

(3) L は discriminator term をもつ。

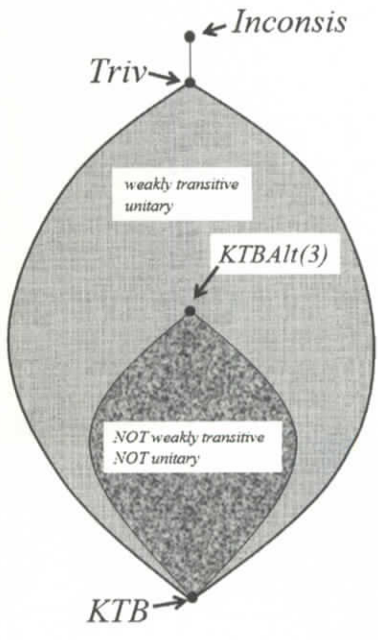
(4) L の単一化のタイプは 1 である。

[証明]

(1) (2) (3) が同値であることは[8]の結果である。(1) と (4) が同値であることがこの論文からいえる結論である。 □

上の系において (2) と (3) の詳細についてはこの論文では触れてないが、命題様相論理に関する重要な性質であることを付け加えておく。

本論文での議論を通して、$NExt(KTB)$ の中で論理 $L_0 = KTBAlt(3)$ が様相論理の重要な性質をもつ、もたないのちょうど境目に位置し、特別な役割を持っていることが示された。本論文で明らかにされた $NExt(KTB)$ の束としての構造の様子は、ちょうど右の図のようになっている。



参考文献

[1] Byrd M., "*On the addition of weakened L-reduction axioms to the Brower system*", Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 24 (1978), 405-408.

[2] Chagrov A., Zakharyaschev M., "*Modal Logic*", Clarendon Press, Oxford, 1997.

[3] Dzik W., "*Unification types in logic*", Wydawnictwo Uniwersytetu Slaskiego in Katowice, 2007.

[4] Ghilardi S., "*Unification through Projectivity*", J.of Symbolic Computation 7, 733-752 (1997)

[5] Ghilardi S., "*Unification in Intuitionistic Logic*", J.of Symbolic Logic 64, N.2, 859-880 (1999).

[6] Herbrand J., "*Recherches sur la Théorie de la Démonstration*", Ph.D.thesis, Sorbonne, 1930.

[7] Knuth D.E., Bendix P.B., "*Simple word problems in universal algebra*", in J.Leech, ed. 'Computational Problems in Abstract Algebra', Pergamon Press, Oxford, 1970.

[8] Kowalski T., Kracht M., "*Semisimple Varieties of Modal Algebras*", Studia Logica 83 (2006), 351-363.

[9] Robinson J.A., "*Theorem proving on the computer*", J.of the ACM 10 (2), 163-172, 1963.

[10] Miyazaki Y., "*A splitting logic in Next(KTB)*", Studia Logica 85, 399-412 (2007).