

## 越境汚染と環境規制に関する確率微分ゲーム分析<sup>†</sup>

前 鶴 政 和

### 1. はじめに

近年、環境汚染が深刻となっており、1国内の環境汚染だけではなく、国境を越えて汚染物質が広がる越境汚染が問題となっている。また、汚染物質は長期にわたって蓄積されていくものであり、その蓄積過程には、不確実性が生じると考えられる。したがって、越境汚染問題を考える際には、長期的視点で考察する必要があるため、静学分析の枠組みではなく、不確実性を考慮に入れた上で、動学分析の枠組みで分析しなければならない。

以上のような問題意識にしたがって、本稿は、2国の政府が汚染物質の排出量を規制する状況を考える。また、汚染物質は、ある国で発生すると国境を越えて外国に広がるものとし、自国の排出量と外国の排出量の一部の合計が通時的に蓄積され、2国に環境損失を与えるものとする。その際、蓄積過程に不確実性が生じ、幾何 Brown 運動にしたがって変動すると仮定する。本稿の目的は、以上のような想定の下で、2国政府間の無限期間の確率微分ゲームを考えることによって、不確実性の程度や越境汚染の程度が排出量や汚染ストックに及ぼす影響について考察することである。

本稿の分析は、以下に挙げるような先行研究に依存する。Katsoulacos &

---

<sup>†</sup> 本稿は日本学術振興会科学研究費補助金(若手研究(B)、課題番号:19730189)の成果の一部です。感謝申し上げます。

Xepapadeas (1996) は、排出税及び排出削減補助金が課されている状況で、同一国内でクールノー競争を行う 2 企業が排出削減に投資する際の、最適な排出税率及び排出削減補助金率を導出している。しかし、本稿と異なり、彼らの研究は同一国内の 2 企業を対象としたものであり、さらに、動学的な分析は行われていない。

次に、微分ゲームによる分析としては、以下のような研究が挙げられる。Kort (1996)、Stimming (1999) は、同一国内にある 2 企業が、排出税や排出規制の下での企業の最適な投資戦略に関して微分ゲームの枠組みで分析している。しかし、本稿と異なり、彼らの研究は同一国内の 2 企業を対象としたものであり、さらに、政府の最適な戦略は考察されていない。

Wirl (2004, 2008) は、排出量を戦略変数として、確率微分ゲームの枠組みで地球温暖化問題を分析している。しかし、越境汚染の程度との関連は考察されていない。

以上のような先行研究に基づき、本稿では確率微分ゲームの枠組みを用いて排出量規制について分析し、Markov 完全ナッシュ均衡解及び協調均衡解を導出し、越境汚染の程度と分散が定常状態における排出量や汚染ストックの期待値にどのような影響をもたらすかを明らかにする。

本稿の構成は以下の通りである。2 節で基本モデルを提示する。3 節で各国政府の確率的動学最大化問題を定式化し、確率微分ゲームの枠組みを用いて各国政府間の排出量ゲームの Markov 完全ナッシュ均衡解を求める。4 節で協調均衡解を求める。5 節でシミュレーション分析を行なう。6 節で結論を述べる。

## 2. 基本モデル

本節では、基本モデルを提示する。2 国が<sup>8</sup>、生産活動に伴って汚染物質を排出するものとする。第  $i$  国の排出量を  $q_i$ 、第  $i$  国の社会便益を以下の式で表す。

$$v(q_i) = \alpha q_i - \frac{\beta}{2} q_i^2 \quad (1)$$

2国によって排出される汚染物質のうち、一部は自然浄化されるが、浄化されない部分は通時的に蓄積される。ここで、各国の汚染物質は、自国に蓄積されるのみならず、一部は国境を越え、外国に蓄積されていくものとする。

また、蓄積過程に不確実性が生じるものとする。すなわち、 $S_i(t)$  を  $t$  時点での第  $i$  国での汚染ストックとすれば、 $S_i(t)$  は以下の確率微分方程式に従って蓄積されていく。

$$dS_i(t) = \{q_i(t) + \theta q_j(t) - \delta S_i(t)\} dt + \sigma_i S_i(t) dw_i(t), \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (2)$$

ただし、 $\delta$  は自然浄化率を表す。 $\theta \in [0, 1]$  は越境汚染の程度を表す。

現実の汚染物質の蓄積過程から生じる結果は不確実であると考えられる。そこで、確率的要素として(2)式には幾何 Brown 運動を表す項  $\sigma_i S_i(t) dw_i$  を導入している。 $\sigma_i > 0$  は分散パラメータを表し、 $dw_i$  は Wiener 過程  $w_i$  の増分である。共分散は  $\text{cov}(w_i, w_j) = 0$  とする。このモデルは、平均的な汚染物質の蓄積が増加すればするほど、汚染物質の蓄積の変動が大きくなるということを意味する。

各国の環境損失関数は、以下のように表される。

$$D(S_i) = hS_i^2/2 \quad (3)$$

### 3. Markov 完全ナッシュ均衡解

本節では、各国政府間の排出量ゲームに関する Markov 完全ナッシュ均衡<sup>1)</sup>を導出する。各国政府は、各時点において状態変数である汚染ストックに依存して排出量を決定する、Markov 戦略を採用するものと仮定する。

各国政府は、汚染物質の蓄積過程(2)式の制約の下で、社会便益から環境損失を差し引いた各国政府の社会厚生(割引率  $\rho$  で割引かれた)期待割引現在価値を最大化するように、その排出量を選択するものとする。したがって、

1) 確率微分ゲームの Markov 完全ナッシュ均衡については、Dockner et al. (2000)などを参照。

各国政府の確率的動学最大化問題は、次式で表される<sup>2)</sup>。

$$V_i = \max_{q_i} E \left( \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [v(q_i) - D(S_i)] dt \right) \quad (4)$$

$$s.t. \quad dS_i = \{q_i + \theta q_j - \delta S_i\} dt + \sigma_i S_i dw_i$$

ただし、 $E$  は期待値を表す。

(4) 式の  $V_i$  は政府  $i$  の価値関数であり、以下の Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を満足しなければならない。

$$\rho V_i = \max_{q_i} \left\{ \alpha q_i - \frac{\beta}{2} q_i^2 - \frac{h}{2} S_i^2 + V_{S_i} (q_i + \theta q_j - \delta S_i) + \frac{\sigma_i^2 S_i^2}{2} V_{S_i S_i} \right\} \quad (5)$$

ここで、汚染ストックに関する対称性を仮定する。

このゲームの価値関数は以下のような  $S$  に関する 2 次関数であると推測される。

$$V = \phi_0 + \frac{1}{2} \phi_1 S^2 + \phi_2 S \quad (6)$$

(6) 式より、次の式が得られる。

$$V_S = \frac{\partial V}{\partial S} = \phi_1 S + \phi_2 \quad (7)$$

$$V_{SS} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \phi_1 \quad (8)$$

(5) 式の右辺における最大化の一階の条件から、最適な排出量に関して以下の式を得る。

$$q = \frac{\alpha + V_S}{\beta} \quad (9)$$

ただし、 $q_1 = q_2 = q$  である。

(5) 式に (6) 式の価値関数、(7)、(8) 式と (9) 式の最適な排出量を代入して係数比較を行うと、(6) 式の価値関数のパラメータに関して、以下の式を得る。

---

2) 確率的動学最大化問題については、Chang (2004)、Kamien & Schwartz (1991)などを参照。

$$\phi_1 = \frac{(\beta\rho + 2\beta\delta - \beta\sigma^2) - \sqrt{(\beta\rho + 2\beta\delta - \beta\sigma^2)^2 + 4(1+2\theta)\beta h}}{2(1+2\theta)} < 0 \quad (10)$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha(\theta+1)\phi_1}{\beta\rho + \beta\delta - (2\theta+1)\phi_1} < 0 \quad (11)$$

$$\phi_3 = \frac{(2\theta+1)\phi_2^2 + 2\alpha(\theta+1)\phi_2 + \alpha^2}{2\beta\rho} \quad (12)$$

なお、 $\phi_1$  に関しては正の共役解も存在するが、後述するように、経路の安定条件のために、これは負でなければならない。

次に、汚染ストックの経路について検討する<sup>3)</sup>。(2)式に最適な排出量の式(9)を代入すると、次式を得る。

$$dS = [A^N - B^N S] dt + \sigma S dw \quad (13)$$

ただし、 $A^N = \frac{(1+\theta)\alpha + (1+\theta)\phi_2}{\beta}$ 、 $B^N = \frac{\beta\delta - (1+\theta)\phi_1}{\beta}$  である。

(13)式を確率積分方程式として書き換えると、次式を得る。

$$S(t) = S_0 + \int_0^t [A^N - B^N S(s)] ds + \int_0^t \sigma S dw \quad (14)$$

汚染ストックの経路の期待値は次のようになる。

$$E[S(t)] = S_0 + \int_0^t [A^N - B^N E[S(s)]] ds \quad (15)$$

この式の解は次のように与えられる。

$$E[S^N(t)] = \exp(-B^N t) S_0 + (1 - \exp(-B^N t)) \frac{A^N}{B^N} \quad (16)$$

ただし、上付の  $N$  は Markov 完全ナッシュ均衡を表す。

経路の安定条件が成立するためには、 $B^N > 0$  である必要があり、そのためには、上述したように、 $\phi_1 < 0$  でなければならない。

ここで、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡の汚染ストックの期待値は、以下のように求められる。

---

3) 以下の議論については、Prasad & Sethi (2004)を参照。

$$E[\hat{S}^N] = \frac{A^N}{B^N} \quad (17)$$

ただし、 $\wedge$  は定常状態を表す。

(9)式と(17)式より、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡の排出量の期待値は以下のように表される。

$$E[\hat{q}^N] = \frac{\alpha + \phi_2 + \phi_1 E[\hat{S}^N]}{\beta} \quad (18)$$

ここで、(6)式と(17)式より、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡の価値関数の期待値は、次のように表される。

$$E[\hat{V}^N] = \phi_0 + \frac{1}{2} \phi_1 E[\hat{S}^N]^2 + \phi_2 E[\hat{S}^N] \quad (19)$$

#### 4. 協調均衡解

本節では、各国政府が<sup>8</sup>、汚染物質の蓄積過程(2)式の制約の下で、各国政府の社会厚生<sup>9</sup>の和の(割引率 $\rho$ で割引かれた)期待割引現在価値を最大化するようにその排出量を選択するものとする。各国政府の確率的動学最大化問題は、次式で表される。

$$W = \max_{q_i, q_j} E \left( \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [v(q_i) + v(q_j) - D(S_i) - D(S_j)] dt \right) \quad (20)$$

$$s.t. \quad dS_i = \{q_i + \theta q_j - \delta S_i\} dt + \sigma_i S_i dw_i$$

$W$  は両国政府全体の価値関数であり、以下の Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \rho W &= \max_{q_i, q_j} \left\{ \alpha(q_i + q_j) - \frac{\beta}{2}(q_i^2 + q_j^2) - \frac{h}{2}(S_i^2 + S_j^2) \right. \\ &\quad \left. + W_{S_i}(q_i + \theta q_j - \delta S_i) + W_{S_j}(q_j + \theta q_i - \delta S_j) + \frac{\sigma_i^2 S_i^2}{2} W_{S_i S_i} + \frac{\sigma_j^2 S_j^2}{2} W_{S_j S_j} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、汚染ストックに関する対称性を仮定する。

このゲームの価値関数は以下のような  $S$  に関する 2 次関数であると考えられる。

$$W = \psi_0 + \frac{1}{2}\psi_1 S^2 + \psi_2 S \quad (22)$$

(22) 式より、次の式が得られる。

$$W_s = \frac{\partial W}{\partial S} = \psi_1 S + \psi_2 \quad (23)$$

$$W_{ss} = \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} = \psi_1 \quad (24)$$

(21) 式の右辺における最大化の一階の条件から、最適な排出量に関して以下の式を得る。

$$q = \frac{\alpha + (1+\theta)W_s}{\beta} \quad (25)$$

ただし、 $q_1 = q_2 = q$  である。

(21) 式に (22) 式の価値関数、(23)、(24) 式と (25) 式の最適な排出量を代入して係数比較を行うと、(22) 式の価値関数のパラメータに関して、以下の式を得る。

$$\psi_1 = \frac{(\beta\rho + 4\beta\delta - 2\beta\sigma^2) - \sqrt{(\beta\rho + 4\beta\delta - 2\beta\sigma^2)^2 + 16(\theta+1)^2\beta h}}{4(\theta+1)^2} < 0 \quad (26)$$

$$\psi_2 = \frac{2\alpha(\theta+1)\psi_1}{\beta\rho + 2\beta\delta - 2(\theta+1)^2\psi_1} < 0 \quad (27)$$

$$\psi_0 = \frac{(\theta+1)^2\psi_2^2 + 2\alpha(\theta+1)\psi_2 + \alpha^2}{\beta\rho} \quad (28)$$

なお、 $\psi_1$  に関しては正の共役解も存在するが、後述するように、経路の安定条件のために、これは負でなければならない。

次に、汚染ストックの経路について検討する。(2) 式に最適な排出量の式 (25) を代入すると、次式を得る。

$$dS = [A^c - B^c S] dt + \sigma S dw \quad (29)$$

ただし、 $A^c = \frac{(1+\theta)\alpha + (1+\theta)^2\psi_2}{\beta}$ 、 $B^c = \frac{\beta\delta - (1+\theta)^2\psi_1}{\beta}$  である。

(29)式を確率積分方程式として書き換えると、次式を得る。

$$E[S(t)] = S_0 + \int_0^t [A^c - B^c S(s)] ds + \int_0^t \sigma S dw \quad (30)$$

汚染ストックの経路の期待値は、次のようになる。

$$E[S(t)] = S_0 + \int_0^t [A^c - B^c E[S(s)]] ds \quad (31)$$

この式の解は次のように与えられる。

$$E[S^c(t)] = \exp(-B^c t) S_0 + (1 - \exp(-B^c t)) \frac{A^c}{B^c} \quad (32)$$

ただし、上付のCは協調均衡を表す。

経路の安定条件が成立するためには、 $B^c > 0$ である必要があり、そのためには、上述したように、 $\psi_1 < 0$ でなければならない。

ここで、定常状態における協調均衡の汚染ストックの期待値は、以下のよう  
に求められる。

$$E[\hat{S}^c] = \frac{A^c}{B^c} \quad (33)$$

ただし、 $\hat{\cdot}$ は定常状態を表す。

(25)式と(33)式より、定常状態における協調均衡の排出量の期待値は以下の  
ように表される。

$$E[\hat{q}^c] = \frac{\alpha + (1+\theta)\psi_2 + (1+\theta)\psi_1 E[\hat{S}^c]}{\beta} \quad (34)$$

ここで、(22)式と(33)式より、定常状態における協調均衡の価値関数の期待  
値は、次のように表される。

$$E[\hat{W}^c] = \psi_0 + \frac{1}{2}\psi_1 (E[\hat{S}^c])^2 + \psi_2 E[\hat{S}^c] \quad (35)$$



## 5. シミュレーション分析

本節では、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡解及び協調均衡解における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値が、越境汚染の程度や分散の変化によってどのように影響を受けるかということを検討する。

(17)式、(18)式、(33)式、(34)式で得られた定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡解及び協調均衡解における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値に関して、パラメータに具体的な数値を与えて、シミュレーション分析を行う。

まず、越境汚染の程度が変化した場合の効果を見るために、各パラメータに関して、 $\rho=0.05, \alpha=1, \beta=1, h=0.5, \delta=0.1, \sigma=0.2$  を仮定し、 $\theta \in [0,1]$  の範囲で、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡解及び協調均衡解の排出量の期待値及び汚染ストックの期待値の変化を表すと、図 1～2 のようになる。

図 1～2 より、次のような結果が得られる。

### 結果 1

越境汚染の程度が高まると、

(i) Markov 完全ナッシュ均衡解に関して、定常状態における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値は増加する。

(ii) 協調均衡解に関して、定常状態における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値は減少する。

図 1

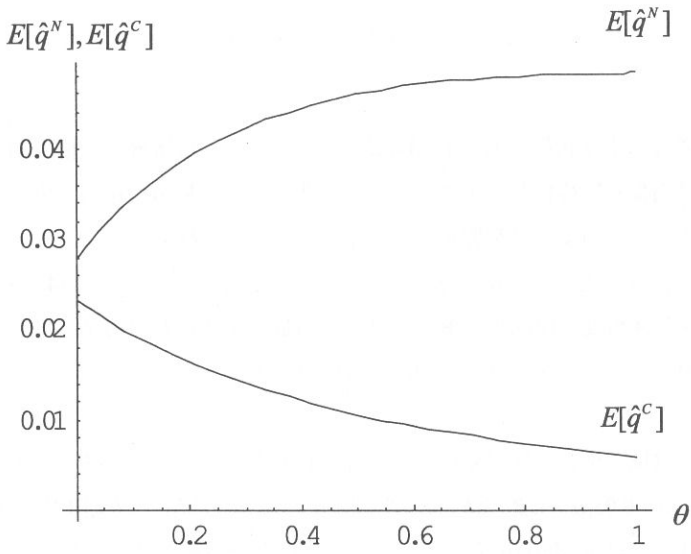
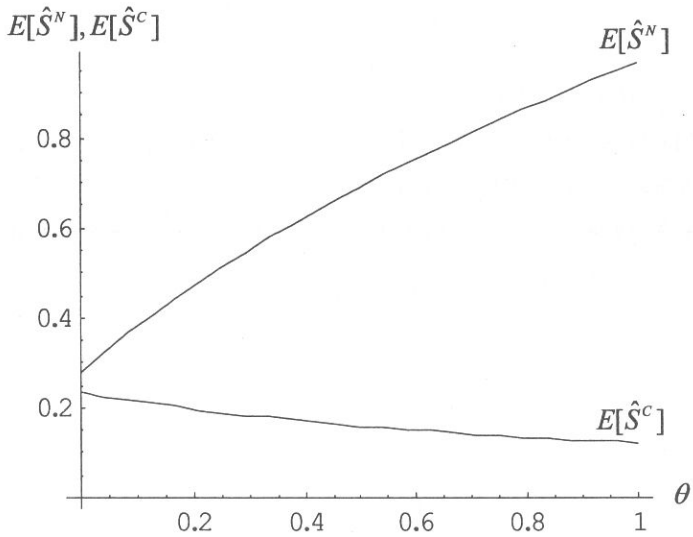


図 2



次に、分散が変化した場合の効果を見るために、各パラメータに関して、 $\rho=0.05, \alpha=1, \beta=1, h=0.5, \delta=0.1, \theta=0.5$ を仮定し、 $\sigma \in [0,1]$ の範囲で、定常状態における Markov 完全ナッシュ均衡解及び協調均衡解の排出量及び汚染ストックの期待値の変化を表すと、図3～4のようになる。

図3～4より、次のような結果が得られる。

## 結果2

分散が大きくなると、

(i) Markov 完全ナッシュ均衡解に関して、定常状態における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値は減少する。

(ii) 協調均衡解に関して、定常状態における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値は減少する。

また、定常状態における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値を Markov 完全ナッシュ均衡解と協調均衡解とで比較すると、図1～図4より、次の結果が得られる。

## 結果3

(i) 定常状態における排出量の期待値に関して、Markov 完全ナッシュ均衡解の方が協調均衡解より高い。

(ii) 定常状態における汚染ストックの期待値に関して、Markov 完全ナッシュ均衡解の方が協調均衡解より高い。

図3

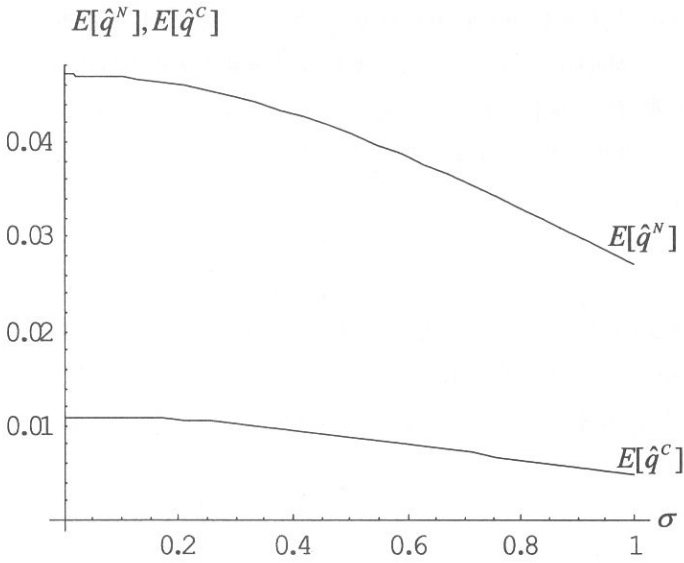
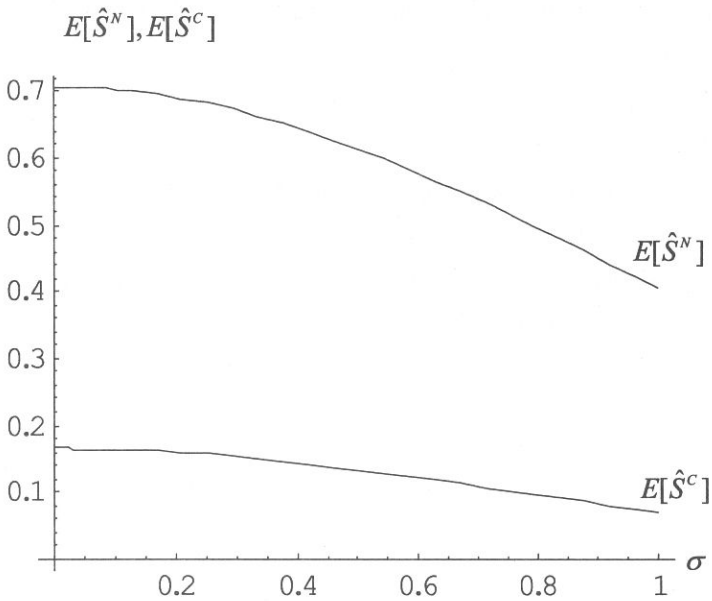


図4



## 6. 結 論

本稿は、2国が汚染物質を排出し、自国の汚染物質の一部が外国に蓄積されるような状況を想定した。また、汚染物質の蓄積過程に不確実性が生じるものとした。そのような状況で、各国政府間で行われる排出量ゲームを確率微分ゲームの枠組みで分析し、Markov 完全ナッシュ均衡解および協調均衡解を導出し、越境汚染の程度や分散の変化が定常状態における排出量の期待値や汚染ストックの期待値に及ぼす影響について、シミュレーション分析を行った。

本稿の分析によって、以下のような結果が得られた。まず、分散が大きくなると、Markov 完全ナッシュ均衡解および協調均衡解において、定常状態における排出量の期待値及び汚染ストックの期待値が減少する、という結果が得られた。汚染物質の蓄積過程には不確実性が働くと考えられ、その不確実性は、環境問題が深刻化していく中で、ますます高まっていくと予想される。その場合、不確実性がない場合と比較して、各国政府は長期的には（定常状態において）低い排出量を課すことが最適であり、その結果、長期的に（定常状態において）低い汚染ストックに落ち着くことになる。

また、越境汚染の程度が上昇すると、Markov 完全ナッシュ均衡解における定常状態の排出量の期待値及び汚染ストックの期待値は増加し、協調均衡解における定常状態の排出量の期待値及び汚染ストックの期待値は減少する、という結果が得られた。越境汚染の程度が上昇すると、協調均衡解においては、環境汚染を悪化させないために各国政府は協調して長期的に（定常状態において）排出量を抑制しようとする誘因が働き、その結果、長期的に（定常状態において）汚染ストックが減少すると考えられる。

ただし、本稿では越境汚染の程度について対称性を仮定したが、第1国から第2国への越境汚染の程度と第2国から第1国への越境汚染の程度とが異なる状況についての分析が必要である。

この点を考慮に入れて本稿の分析を拡張することが、今後の課題である。

参考文献

- Barrett, S.(1994), 'Strategic Environmental Policy and International Trade,' *Journal of Public Economics*, vol.54, pp.325-338.
- Chang, F.R.(2004), *Stochastic Optimization in Continuous Time*, Cambridge University Press.
- Dockner, E., Jorgensen, J., Long, N.V. and G. Sorger(2000), *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge University Press.
- Kamien, M.I. and N.L. Schwartz(1991), *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management(2nd Edition)*, North-Holland.
- Katsoulacos, Y. and A. Xepapadeas(1996), 'Environmental Innovation, Spillovers and Optimal Policy Rules,' in C. Carraro, Y. Katsoulacos and A. Xepapadeas(ed.), *Environmental Policy and Market Structure*, pp.143-150, Kluwer Academic Publishers.
- Kort, P.M.(1996), "Pollution Control and the Dynamics of the Firm: The Effects of Market-Based Instruments on Optimal Firm Investments," *Optimal Control Applications & Methods*, vol.17, pp.267-279.
- Prasad, A. and S.P. Sethi(2004), "Competitive Advertising under Uncertainty: A Stochastic Differential Game Approach," *Journal of Optimization and Applications*, vol. 123, no.1, pp.163-185.
- Stimming, M.(1999), "Capital Accumulation subject to Pollution Control: Open-loop versus Feedback Investment Strategies," *Annals of Operations Research*, vol. 88, pp.309-336.
- Wirl, F.(2004), "International Greenhouse Gas Emissions when Global Warming is a Stochastic Process," *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol.20, pp.95-114.
- Wirl, F.(2008), "Tragedy of the Commons in a Stochastic Game of a Stock Externality," *Journal of Public Economic Theory*, vol.10, pp.99-124.